

פרק 2.02 – הכללת מושג הקבוצה

חוברת תרגילים – Buddy Nativ

פתרון

1. השלימו את המשפטים הבאים:

- א. הסימון המקובל \mathbb{N} מייצג את קבוצת המספרים ה**טבעיים**.
 ב. הסימון המקובל \mathbb{Z} מייצג את קבוצת המספרים ה**שלמים**.

2. קבעו כמה איברים יש לכל אחת מהקבוצות הבאות:

a. $\{7, \{7\}\}$	b. $\{\mathbb{N}\}$	c. $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$	d. \mathbb{N}	e. \emptyset
2	1	2	∞	0
f. $\{\mathbb{N}, 2\}$	g. $\{-1, 0, \emptyset\}$	h. $\{\emptyset, \mathbb{Z}\}$	i. $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$	j. $\{-2, -1, 0, \mathbb{N}\}$
2	3	2	2	4

3. לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה.

שימו לב, במידה והטענה לא נכונה, הציעו אפשרות לתיקון הטענה (בלי לשנות את סימן היחס) כך שהיא תהיה אמיתית לוגית. (בחלק מהתרגילים יכולה להיות יותר מאפשרות אחת לתיקון).

למשל:

הטענה $3 \in \{\mathbb{N}\}$ לא נכונה מפני ש-3 לא מופיע בקבוצה $\{\mathbb{N}\}$ אשר יש בה רק איבר אחד והוא לא 3. אחת האפשרויות לתיקון תהיה להוריד את הסוגריים המסולסלים,

ובכך הקבוצה תהפוך להיות קבוצת הטבעיים $\mathbb{N} : \mathbb{N}$ (אפשר גם לכתוב כך: $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$)

תזכורת: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ ולכן: $\{\mathbb{N}\} = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}\}$ **ולא:** $\{\mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

אפשרות נוספת לתיקון: ניתן להוסיף את האיבר 3 לקבוצה הימנית, ואז נקבל טענה נכונה: $3 \in \{\mathbb{N}, 3\}$.

a. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$	T	
b. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	T	
c. $\{\mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$	F	אפשרות לתיקון: להוריד את הסוגריים
d. $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$	T	
e. $\{\mathbb{N}\} \subset \{\mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$	F	אפשרות לתיקון: $\{\mathbb{N}\} \subset \{\mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$
f. $\mathbb{N} \subset \{\mathbb{Z}\}$	F	אפשרות לתיקון: להוריד את הסוגריים
g. $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$	F	אפשרות לתיקון: $\mathbb{N} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{N}\}$
h. $\{1, 2\} \subset \mathbb{Z}$	T	
i. $\{-1, 0, \mathbb{N}\} \subset \{\mathbb{Z}\}$	F	אפשרות לתיקון: $\{-1, 0, \mathbb{N}\} \subset \{\mathbb{Z}, -1, 0, \mathbb{N}\}$
j. $\{\{\mathbb{N}\}\} \in \{\mathbb{Z}, \{\mathbb{N}\}\}$	F	אפשרות לתיקון: $\{\{\mathbb{N}\}\} \in \{\mathbb{Z}, \{\{\mathbb{N}\}\}\}$

4. לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה/לא נכונה/לא ניתן לקבוע.

- a. $\{1,3,5,7\} \subseteq \{1,3,5,7, \dots\}$ **T**
- b. $\{1,3,5,7\} = \{1,3,5,7, \dots\}$ **F**
- c. $\{1,3,5,7\} = \{1,3,5,7\}$ **T**
- d. $\{1,3,5,7 \dots\} = \{1,3,5,7 \dots\}$ **לא ניתן לקבוע**
- e. $\{2,4,6,8,10\} \subset \{2,4,6,8,10,12 \dots\}$ **T**
- f. $\{1,6,11,16,21\} \subseteq \{\dots - 9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, 26 \dots\}$ **T**
- g. $\{0,1,3,5,7\} \subseteq \mathbb{N}$ **F**

5. ישנן 2 דרכי הצגה מקובלות לתיאור קבוצה בצורה כללית:

דרך א' – הצגה לפי תכונה.

דרך ב' – הצגה לפי מבנה.

א. כתבו במילים שלכם/ן, מה ההבדל בין 2 דרכי ההצגה?

תשובה:

בהצגה לפי תכונה, האיברים ש"נכנסים" לקבוצה הם כל האיברים שמקיימים את 2 התכונות (2 התנאים).

בהצגה לפי מבנה, האיברים ש"נכנסים" לקבוצה הם כל התוצאות שלאחר ההצבה במבנה (בביטוי עם הפרמטר).

ב. לגבי כל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם דרך ההצגה שלה היא לפי תכונה (1) או לפי מבנה (2).

ג. הציגו את הקבוצות בצורה מפורשת.

- a. $\{2x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ **2** **$\{\dots - 3, -1, 1, 3, 5, 7 \dots\}$**
- b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ זוגי}\}$ **1** **$\{\dots - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 \dots\}$**
- c. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$ **1** **$\{3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$**
- d. $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid 2 \leq x < 5\}$ **1** **$\{2, 3, 4\}$**
- e. $\{2x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ **2** **$\{2, 8, 18, 32 \dots\}$**
- f. $\{x + 1 \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \wedge 2 \leq x < 5\}$ **2** **$\{3, 4, 5\}$**
- g. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 1\}$ **1** **\emptyset**
- h. $\{x \leq 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ **1** **$\{1\}$**
- i. $\{x \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\} \mid 2x^2 = 2\}$ **1** **$\{-1, 1\}$**
- j. $\{2x^2 = 8 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ **1** **$\{-2, 2\}$**
- k. $\{2x^2 = 8 \mid x \in \mathbb{N}\}$ **1** **$\{2\}$**
- l. $\{2x^2 + 8 \mid x \in \{1, 2\}\}$ **2** **$\{10, 16\}$**
- m. $\{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 \in \mathbb{N}\}$ **1** **$\{4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$**
- n. $\{x - 5 \mid x \in \mathbb{N}\}$ **2** **$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$**

6. סמנו את הטענות הנכונות.

הבהרה: אי זוגי – *odd*, זוגי – *even*

- a. $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ odd}\}$
- b. $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- c. $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- d. $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \{4x \mid x \in \mathbb{N}\}$
- e. $\{3x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- f. $\{x + 3 \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \{x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- g. $\{x \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$
- h. $\{x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
- i. $\{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$
- j. $\{x - 3 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$
- k. $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 6\}$
- l. $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ odd}\}$
- m. $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- n. $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- o. $\{-2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- p. $\{6x - 3 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{6x + 3 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- q. $\{6x - 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{6x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

7. נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{4x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \dots\}$$

$$B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \dots\}$$

$$C = \{2x + 4 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 \dots\}$$

$$D = \left\{ \frac{x}{4} \mid x \in A \right\} = \mathbb{Z}$$

$$E = \left\{ \frac{3x}{3} \mid x \in B \right\} = B$$

סמנו את הטענות הנכונות:

- a. $A \subseteq B$ b. $B \subseteq A$ c. $A \subseteq C$ d. $A \subset C$
- e. $C = D$ f. $C \subseteq D$ g. $D \subseteq E$ h. $E = B$

כתב ויצר – אופיר אדרי

8. הציגו את הקבוצות הבאות בצורה כללית.

- a. $\{\dots - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 \dots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ even}\}$
- b. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 \dots\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ odd}\}$
- c. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} = \{2x - 1 \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ odd} \wedge x \leq 15\}$
- d. $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots\} = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ odd} \wedge x \geq 3\}$
- e. $\{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \dots\} = \{2x + 3 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- f. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ראשוני}\}$
- g. $\{\dots - \frac{5}{3}, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3} \dots\} = \{\frac{2x+1}{3} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{x}{3} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ odd}\}$
- h. $\{1, 4, 9, 16, 25 \dots\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- i. $\{0, 1, 4, 9, 16, 25 \dots\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- j. $\{0, \frac{1}{2}, 2, 4.5, 8, 12.5 \dots\} = \{\frac{1}{2}x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- k. $\{\dots - 11, -7, -3, 1, 5, 9 \dots\} = \{4x - 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- l. $\{\dots - 10, -3, 4, 11, 18 \dots\} = \{7x + 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- m. $\{4, 9, 14, 19, 24 \dots\} = \{5x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- n. $\{-3, 0, 3, 6, 9, 12 \dots\} = \{3x - 6 \mid x \in \mathbb{N}\}$

9. נתונות הקבוצות A, B הבאות:

$$A = \{x - 5 \mid x \in \{6, 7, 8, 9\}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1 \oplus 3 < x < 5 \oplus x = 9\} = \{1, 4, 9\}$$

רשמו את הקבוצות הבאות בצורה מפורשת:

- a. $\{x \in A \mid x^2 \in B\} = \{1, 2, 3\}$
- b. $\{x \in B \mid x^2 \in A\} = \{1\}$
- c. $\{x \in A \mid \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4\}$
- d. $\{x \in A \mid \sqrt{x} \in B\} = \{1\}$
- e. $\{x \in B \mid \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9\}$
- f. $\{x \in B \mid \sqrt{x} \in B\} = \{1\}$

10. רשמו את הקבוצות הבאות בצורה מפורשת.

- a. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 7 \vee x \leq 6\} = \{\dots - 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 \dots\}$
- b. $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 4 \oplus x \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10 \dots\}$
- c. $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 8 \wedge x < 7\} = \emptyset$
- d. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ even} \wedge 2 < x \leq 9\} = \{4, 6, 8\}$
- e. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 2 \vee x > 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$
- f. $\{x \in \mathbb{Z} \mid -x < -3 \oplus x > -1\} = \{0, 1, 2, 3\}$
- g. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 3 \rightarrow x > 7\} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \dots\}$
- h. $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 6 \rightarrow x < 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- i. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6 \vee x < 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- j. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 4 \leftrightarrow -x \leq -4\} = \mathbb{N}$
- k. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1 \leftrightarrow x \geq 1\} = \emptyset$
- l. $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 4 \rightarrow \neg(x > 6 \wedge 3 \leq x)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$