

**פרק 3.01 – הגדרות, סימונים ושלייה**
**חוברת תרגילים – Buddy Nativ**
**פתרון**

1. נתונות הנוסחאות הבאות:

$$A(x): 2x + 3 \geq 4x(2 - x)$$

$$B(x): 7 - x < x - 4$$

$$C(x): 2|x + 3$$

קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים:

- a.  $A(1) \oplus B(1) \oplus C(1)$  **F**
- b.  $A(1) \oplus B(2) \oplus C(3) \oplus B(6)$  **T**
- c.  $(A(2) \oplus B(3) \oplus C(2)) \rightarrow (A(0) \leftrightarrow \neg B(6))$  **F**
- d.  $(B(-5) \vee B(5)) \leftrightarrow (C(-5) \vee C(5))$  **F**
- e.  $(C(75) \wedge A(-1)) \rightarrow (\neg B(7) \oplus C(81))$  **T**

2. נתונות הנוסחאות הבאות:

$$A(x): 3|x$$

$$B(x, y): 3|xy$$

$$C(x, y, z): 3z|x + y$$

$$D(x, y, z, w): yw|xz$$

קבעו את ערך האמת של הפסוקים הבאים:

- a.  $(A(-6) \rightarrow B(2,5)) \rightarrow C(1,3,5)$  **T**
- b.  $(D(1,2,3,4) \leftrightarrow D(3,4,1,2)) \oplus (C(12, -30,3) \wedge B(27, -19))$  **F**
- c.  $(A(-9) \wedge C(4,8,4) \wedge D(2,5,2.5,2)) \rightarrow B(4,5)$  **T**
- d.  $(B(-4, -3) \oplus \neg C(-3, -3, -2) \oplus D(-2,1, -3,8)) \leftrightarrow (\neg C(2,1,1))$  **F**
- e.  $(D(3,2, -4,1) \leftrightarrow C(1,2,1)) \vee (D(-2,3,1, -4) \leftrightarrow C(2,3,2))$  **T**

3. א. מהי קבוצת אמת?

**תשובה:** תת הקבוצה הגדולה ביותר של קבוצת ההתייחסות שמקיימת את הנוסחה.

ב. בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו את קבוצת האמת בהתאם לקבוצת ההתייחסות ולנוסחה:

 1. הנוסחה:  $x \geq 0$  בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{Z}$ . קבוצת האמת:  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 

 2. הנוסחה:  $x \geq 0$  בקבוצת ההתייחסות  $R$ . קבוצת האמת:  $[0, \infty)$ 

 3. הנוסחה:  $x > 0 \rightarrow x < 5$  בקבוצת ההתייחסות  $R$ . קבוצת האמת:  $(-\infty, 5)$ 

 4. הנוסחה:  $x > 0 \rightarrow x < 5$  בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{Z}$ . קבוצת האמת:  $\{x \in \mathbb{Z} | x < 5\}$ 

 5. הנוסחה:  $(2|x + 3) \rightarrow (x \text{ זוגי})$  בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{Z}$ . קבוצת האמת:  $\{x \in \mathbb{Z} | x \text{ odd}\}$

4. נתונות הנוסחאות הבאות:

$$A(x): 2x \geq 2$$

$$B(x): x - 2 \text{ אי זוגי}$$

$$C(x): x < 0$$

מצאו את קבוצת האמת של הפסוקים הבאים בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{Z}$ :

- $A(x) \rightarrow C(x)$   $\{x \in \mathbb{Z} | x < 1\}$
- $(A(x) \wedge B(x)) \vee \neg C(x)$   $\{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$
- $A(x) \leftrightarrow C(x)$   $\{0\}$
- $B(2x) \leftrightarrow C(x)$   $\{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$
- $B(2x) \oplus B(x)$   $\{x \in \mathbb{Z} | x \text{ odd}\}$
- $A(x) \wedge C(x)$   $\emptyset$

5. כתבו בעברית את המשמעות של הפסוקים הבאים:

- $\exists x \in \mathbb{N}(x > 1)$  יש מספר טבעי שגדול מ-1
- $\forall x \in \mathbb{N}(x > 1)$  כל מספר טבעי גדול מ-1
- $\forall x \in \mathbb{N}(2|x \rightarrow 2|3x)$  עבור כל מספר טבעי, אם הוא זוגי אז גם המכפלה שלו ב-3 יוצאת זוגית  
אפשר גם לומר: כל מספר טבעי מקיים את הגרירה בדרך כלשהי
- $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}(xy \geq 1)$  המכפלה בין כל זוג מספרים טבעיים גדולה או שווה ל-1
- $\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}(xy < 1)$  יש זוג מספרים טבעיים שהמכפלה ביניהם קטנה מ-1
- $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{Z}(xyz > 1 \leftrightarrow x + y + z < 3)$   
המכפלה בין כל שלישית מספרים שלמים גדולה מ-1 אם"מ הסכום שלהם קטן מ-3  
אפשר גם לומר: כל שלישית מספרים שלמים מקיימים את האמ"מ בדרך כלשהי.
- $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z}(xyz > 1 \vee x + y + z < 3)$   
יש שלישית מספרים שלמים שהמכפלה ביניהם גדולה מ-1 או שהסכום שלהם קטן מ-3
- $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}(ab > a + b \wedge a - b < a + b)$   
עבור כל זוג מספרים ממשיים, המכפלה ביניהם גדולה מהסכום שלהם והסכום שלהם גדול מההפרש ביניהם.

6. נתונות הנוסחאות הבאות:

$$\begin{aligned} A(x): & 3|x \\ B(x): & 3 \nmid x \\ C(x): & 2|x \\ D(x): & 2 \nmid x \end{aligned}$$

בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{N}$ , רשמו בעברית את המשמעות של הפסוקים הבאים:

a.  $\forall x(A(x) \vee C(x))$

כל מספר טבעי מתחלק ב-3 או ב-2.

b.  $\exists x(B(x) \wedge D(x))$

יש מספר טבעי שלא מתחלק ב-3 ולא ב-2.

c.  $\forall x \forall y(A(x) \vee B(y))$

בכל זוג מספרים טבעיים, מספר אחד מתחלק ב-3 או שהמספר השני לא מתחלק ב-3.

d.  $\exists x \exists y((A(x) \wedge C(y)) \rightarrow A(xy))$

יש זוג מספרים טבעיים שאם אחד מהם זוגי והשני מתחלק ב-3 אז הכפל ביניהם מתחלק ב-3 אפשר גם לומר: יש זוג מספרים טבעיים שמקיימים את הגרירה בדרך כלשהי.

e.  $\forall x \forall y \forall z((A(x) \wedge B(y) \wedge C(z)) \rightarrow D(xyz))$

עבור כל שלישיית מספרים טבעיים, אם אחד מהם מתחלק ב-3, אחד מהם לא מתחלק ב-3 ואחד מהם מתחלק ב-2 אז הכפל ביניהם הוא אי זוגי.

7. לכל אחד מהפסוקים הבאים, רשמו פסוק שקול שאינו משתמש בסימן השלילה ( $\neg$ ):

a.  $\neg(\forall x(x \geq 1 \rightarrow x^2 > -x))$

$\exists x(x \geq 1 \wedge x^2 \leq -x)$

b.  $\neg(\forall x(x \geq 1) \rightarrow \forall x(x^2 > -x))$

$\forall x(x \geq 1) \wedge \exists x(x^2 \leq -x)$

c.  $\neg(\exists x(\forall y(x^3 - 1 = 7x) \wedge \exists y(110 - x \neq y^2)))$

$\forall x(\exists y(x^3 - 1 \neq 7x) \vee \forall y(110 - x = y^2))$

d.  $\neg(\forall x(\forall y \forall z(xy > z^2) \vee \forall z(z > 0 \rightarrow z^2 \leq 4z)))$

$\exists x(\exists y \exists z(xy \leq z^2) \wedge \exists z(z > 0 \wedge z^2 > 4z))$

e.  $\neg(\forall x \exists y \forall z(xy^2z < \frac{x}{y}) \rightarrow \exists x \forall y \exists z(xyz^2 + 2 = x^2))$

$\forall x \exists y \forall z(xy^2z < \frac{x}{y}) \wedge \forall x \exists y \forall z(xyz^2 + 2 \neq x^2)$

f.  $\neg(\exists x \forall y(\forall z(z > 100x) \rightarrow \exists z(z > 100x)))$

$\forall x \exists y(\forall z(z > 100x) \wedge \forall z(z > 100x))$

g.  $\neg(\exists x \forall y((xy < 100) \rightarrow \forall z(z = 14 \vee 14z \neq y)))$

$\forall x \exists y((xy < 100) \wedge \exists z(z \neq 14 \wedge 14z = y))$

8. לכל אחד מהפסוקים הבאים, רשמו פסוק השקול לשלילתו אשר אינו משתמש בסימן השלילה ( $\neg$ ):

- a.  $\forall x \in \mathbb{N}(x < 7 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N}(xy < y^2 \wedge 7x \leq y))$   
 $\exists x \in \mathbb{N}(x < 7 \wedge \forall y \in \mathbb{N}(xy \geq y^2 \vee 7x > y))$
- b.  $\forall x \in \mathbb{N}(x < 7) \rightarrow \exists y \in \mathbb{N}(xy < y^2 \wedge 7x \leq y)$   
 $\forall x \in \mathbb{N}(x < 7) \wedge \forall y \in \mathbb{N}(xy \geq y^2 \vee 7x > y)$
- c.  $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}(x < 7 \rightarrow (xy < y^2 \wedge 7x \leq y))$   
 $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}(x < 7 \wedge (xy \geq y^2 \vee 7x > y))$
- d.  $\forall x \in \mathbb{Z}(x < 7) \rightarrow (\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}(xy < y^2) \rightarrow \exists y \in \mathbb{N}(y < y^2))$   
 $\forall x \in \mathbb{Z}(x < 7) \wedge (\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}(xy < y^2) \wedge \forall y \in \mathbb{N}(y \geq y^2))$
- e.  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy \leq 9 \vee (\forall z(z < z^2) \wedge \forall z \in \mathbb{R}(xz \leq y)))$   
 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(xy > 9 \wedge (\exists z(z \geq z^2) \vee \exists z \in \mathbb{R}(xz > y)))$
- f.  $\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in \mathbb{R}(xy \leq 9) \vee (\forall z \in \mathbb{R}(z < z^2) \rightarrow \forall z \in \mathbb{R}(xz \leq z^2)))$   
 $\exists x \in \mathbb{R}(\exists y \in \mathbb{R}(xy > 9) \wedge (\forall z \in \mathbb{R}(z < z^2) \wedge \exists z \in \mathbb{R}(xz > z^2)))$
- g.  $(\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy \leq 9)) \vee (\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(\exists z \in \mathbb{R}(z \geq 0) \oplus \forall z \in \mathbb{R}(xy \leq z^2)))$   
 $(\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(xy > 9)) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(\exists z \in \mathbb{R}(z \geq 0) \leftrightarrow \forall z \in \mathbb{R}(xy \leq z^2)))$
- h.  $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{R}((xy > 4 \wedge xy < 10) \rightarrow 5 < xy < 7)$   
 $\exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R}((xy > 4 \wedge xy < 10) \wedge (5 \geq xy \vee xy \geq 7))$

9. מי מהפסוקים הבאים שקול לפסוק:  $\neg(\forall x \exists y(xy < x + y) \rightarrow \exists x \forall y \forall z(x - y \geq xy))$

- a.  $\forall x \exists y(xy \geq x + y) \wedge \forall x \exists y \exists z(x - y \geq xy)$
- b.  $\forall x \exists y(xy < x + y) \wedge \forall x \exists y \exists z(x - y < xy)$
- c.  $\exists x \forall y(xy \geq x + y) \wedge \forall x \exists y \exists z(x - y < xy)$
- d.  $\exists x \forall y(xy \geq x + y) \wedge \exists x \forall y \forall z(x - y \geq xy)$
- e.  $\forall x \exists y(xy < x + y) \vee \forall x \exists y \exists z(x - y < xy)$

10. מי מהפסוקים הבאים שקול לשלילת הפסוק: (תיתכן יותר מתשובה אחת)

$$(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \rightarrow \forall y (y < 1)) \oplus (\forall y (y < 1) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$$

- a.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \wedge \exists y (y \geq 1)) \oplus (\forall y (y < 1) \wedge \exists x \forall y \forall z (2x - y \neq z))$
- b.  $(\exists x \forall y \forall z (2x - y \neq z) \vee \forall y (y < 1)) \oplus (\exists y (y \geq 1) \vee \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$
- c.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \rightarrow \forall y (y < 1)) \leftrightarrow (\forall y (y < 1) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$
- d.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \rightarrow \forall y (y < 1)) \oplus (\forall y (y < 1) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$
- e.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \wedge \exists y (y \geq 1)) \oplus (\forall y (y < 1) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$
- f.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \rightarrow \forall y (y < 1)) \oplus (\forall y (y < 1) \wedge \exists x \forall y \forall z (2x - y \neq z))$
- g.  $(\forall x \exists y \exists z (2x - y = z) \wedge \exists y (y \geq 1)) \leftrightarrow (\forall y (y < 1) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (2x - y = z))$

11. מי מהפסוקים הבאים אינו שקול לשלילת הפסוק: (תיתכן יותר מתשובה אחת)

$$\forall x \exists y \forall z (x(y - z) < 0) \leftrightarrow (\forall x x < 0 \rightarrow \exists x \forall z (xz \geq 9))$$

- a.  $\exists x \forall y \exists z (x(y - z) \geq 0) \leftrightarrow (\forall x x < 0 \wedge \forall x \exists z (xz < 9))$
- b.  $\exists x \forall y \exists z (x(y - z) \geq 0) \leftrightarrow (\forall x x < 0 \rightarrow \exists x \forall z (xz \geq 9))$
- c.  $\forall x \exists y \forall z (x(y - z) < 0) \oplus (\forall x x < 0 \rightarrow \exists x \forall z (xz \geq 9))$
- d.  $\forall x \exists y \forall z (x(y - z) < 0) \leftrightarrow (\forall x x < 0 \wedge \forall x \exists z (xz < 9))$
- e.  $\exists x \forall y \exists z (x(y - z) \geq 0) \leftrightarrow (\exists x x \geq 0 \vee \exists x \forall z (xz \geq 9))$
- f.  $\forall x \exists y \forall z (x(y - z) < 0) \leftrightarrow (\exists x x \geq 0 \vee \exists x \forall z (xz \geq 9))$
- g.  $\exists x \forall y \exists z (x(y - z) \geq 0) \leftrightarrow (\forall x \exists z (xz < 9) \rightarrow \exists x x \geq 0)$



12. מי מהפסוקים הבאים אינו שקול לפסוק: (תיתכן יותר מתשובה אחת)

$$(\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \oplus \forall x \exists y (xy \geq 0)) \rightarrow \forall x (x > 0 \vee 2|x)$$

- a.  $(\forall x \exists y (2xy > y^2) \leftrightarrow \forall x \exists y (xy \geq 0)) \rightarrow \forall x (x > 0 \vee 2|x)$
- b.  $(\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \leftrightarrow \exists x \forall y (xy < 0)) \rightarrow \forall x (x > 0 \vee 2|x)$
- c.  $(\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \leftrightarrow \exists x \forall y (xy < 0)) \vee \forall x (x > 0 \vee 2|x)$
- d.  $\forall x (x > 0 \vee 2|x) \rightarrow (\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \leftrightarrow \forall x \exists y (xy \geq 0))$
- e.  $(\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \leftrightarrow \forall x \exists y (xy \geq 0)) \vee \forall x (x > 0 \vee 2|x)$
- f.  $\exists x (x \leq 0 \wedge 2 \nmid x) \rightarrow (\exists x \forall y (2xy \leq y^2) \leftrightarrow \forall x \exists y (xy \geq 0))$
- g.  $(\forall x \exists y (2xy > y^2) \leftrightarrow \exists x \forall y (xy < 0)) \rightarrow \forall x (x > 0 \vee 2|x)$