

חשיבה מתמטית – 50450002 - בחינה סופית

סמסטר ב' תשפ"ב, תאריך: 03.06.22

משך הבחינה – 3.5 שעות ; חומר עזר – אסור.

מרצים: ד"ר אבי גורן, אלי ברג'ל, אלבינה חייטין-חנקין, ארז איזנשטיין, ויקטור ניקולאיבסקי, עופר ברעם, אמיר גוריון, ילנה סקורטוביץ.

חלק א (45 נקודות)

בחלק זה 3 שאלות פתוחות. יש לענות על כל השאלות.
את התשובות יש לכתוב על גבי השאלון עצמו במקום המיועד לכך.
מחברות הטיוטה והנספחים לא יבדקו!

בהצלחה!

1) (9 נקודות) בכל אחד משלושת הסעיפים הבאים רשמו פסוק השקול לשלילת הפסוק הנתון, מבלי להשתמש בסימן השלילה ($\neg$).
(כתבו תשובה סופית בלבד).

א. $\exists x \left(\forall y (2y > 5x) \rightarrow \exists y ((xy > 10) \vee (\forall z z > x^2 + y^2)) \right)$

ב. $\exists x \forall y \left((2y > 5x) \vee \forall z ((xy > 10z) \rightarrow (z > x^2 + y^2)) \right)$

ג. $\forall x \exists y \forall z \left(((2y > 5x) \rightarrow (xy > 10z)) \rightarrow (z > x^2 + y^2) \right)$

(2) (18 נקודות) נתונות הפונקציות $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 4|x \\ x+2 & , 4 \nmid x \end{cases} \quad , g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 2|x \\ x-2 & , 2 \nmid x \end{cases}$$

(הערה: בסעיפים א'-ב' חובה להוכיח על פי ההגדרה! הסבר אחר לא יתקבל!)

א. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f(x)$ היא חד-חד-ערכית.

ב. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה על.

ג. חשבו את $g \circ f$. הציגו את שלבי החישוב! (יש לפשט את התשובות).

יש להציג את התשובה באופן הבא:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \boxed{} & , x \in \{4n | n \in \mathbb{Z}\} \\ \boxed{} & , x \in \{4n + 2 | n \in \mathbb{Z}\} \\ \boxed{} & , x \in \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

[illegible]

3) עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, קבעו האם הוא אמיתי לוגית בקבוצה $\mathbb{N}$.

א. הפסוק: $(\forall y \exists x (y = x - 50)) \oplus (\forall y \exists x (y = x + 50))$
האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)

ב. הפסוק: $\forall y \exists x ((y = x - 50) \oplus (y = x + 50))$
האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)

ג. הפסוק: $\exists y \forall x ((y = x - 50) \oplus (y = x + 50))$
האם הפסוק אמת לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)
נשלול את הפסוק ונוכיח ששלילתו אמת:

חלק ב (55 נקודות)

בחלק זה 11 שאלות אמריקאיות.
לכל שאלה יש בדיוק תשובה אחת נכונה מבין התשובות האפשריות.
את התשובה הנכונה יש לסמן בדף התשובות הייעודי.
תשובות שיסומנו על גבי השאלון עצמו – לא יבדקו!
אין לסמן יותר מתשובה אחת בכל שאלה. משקל כל שאלה הוא 5 נקודות.

- (1) בכל פעם שמתרחש בלונדון פשע, יש למקאוויטי, המכונה על ידי הסקוטלנד יארד "הנפוליאון של עולם הפשע", אליבי אחד, אם לא שניים. לא כך עבור שלושת סוכניו – מונגוג'רי, ראמפלטיזר וגרידלבון – אשר יום אחד נעצרים לחקירה. מונגוג'רי אומר בחקירתו: "אם לראמפלטיזר יש אליבי אז לגרידלבון יש אליבי". ראמפלטיזר אומרת בחקירתה: "אם לי יש אליבי אז למונגוג'רי יש אליבי". גרידלבון אומרת בחקירתה: "לכל היותר לאחד משלושתנו יש אליבי". ידוע לחוקרים כי בדיוק אחד מבין השלושה שיקר בחקירתו. קבעו מי מבין הטענות הבאות היא מסקנה ודאית מדבריהם של הנחקרים:
- א. לגרידלבון יש אליבי אם ורק אם למונגוג'רי אין אליבי.
 - ב. לראמפלטיזר יש אליבי אם ורק אם לגרידלבון אין אליבי.
 - ג. למונגוג'רי יש אליבי אם ורק אם לראמפלטיזר אין אליבי.
 - ד. לגרידלבון יש אליבי אם ורק אם למונגוג'רי יש אליבי.
 - ה. לראמפלטיזר יש אליבי אם ורק אם לגרידלבון יש אליבי.
 - ו. למונגוג'רי יש אליבי אם ורק אם לראמפלטיזר יש אליבי.

(2) נתונה הקבוצה: $A = (-\infty, 2.5) \setminus \mathbb{N}$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- א. $A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \neg(x \leq 2.5 \rightarrow x \in \mathbb{N})\}$
- ב. $A \setminus \mathbb{Q} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \neg(x \leq 2.5 \rightarrow x \in \mathbb{Q})\}$
- ג. $(\exists x \in A \forall y \in A (xy = 2x)) \oplus (\exists x \in A \forall y \in A (xy = 2y))$
- ד. $\{x + 1 \mid x \in A\} \setminus A = [2.5, 3.5) \Delta \{1, 3\}$
- ה. $(-2.5, 2.5) \setminus \mathbb{Z} \subset A \cap \{-a \mid a \in A\}$
- ו. $\left\{3 - \frac{1}{s} \mid s \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus A$

(3) נתונה הקבוצה $A = \{\mathbb{N}\} \cup P(\{\mathbb{N}\})$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- א. מבין 5 הטענות האחרות, ישנן בדיוק 4 טענות נכונות.
- ב. ישנן בדיוק 6 קבוצות X המקיימות $\phi \subset X \subset A$.
- ג. ישנן בדיוק 21 פונקציות לא הפיכות $f: A \rightarrow A$.
- ד. ישנן בדיוק 120 פונקציות חד-חד-ערכיות $f: A \rightarrow P(A) \setminus A$.
- ה. $(A \cap \{\mathbb{N}, \{\phi\}\} \in A) \wedge (A \cap \{\mathbb{N}, \{\phi\}\} \subset A)$
- ו. $(A \cap P(A) \in P(A)) \wedge (A \setminus P(A) \in P(A))$

(4) סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- א. מבין 5 הטענות האחרות, ישנן בדיוק 4 טענות נכונות.
- ב. $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} (xy = 1)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ג. $\{t \in \mathbb{Z} \mid t^2 \mid 16\} = \{t \in \mathbb{Z} \mid t^2 \mid 32\}$
- ד. $\{x^3 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in (0, \infty) \mid \sqrt[3]{x} \in \mathbb{N}\}$
- ה. $\left\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge |n - m| = 1\right\} = \left(\mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) \setminus \{1\}$
- ו. לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$

5) סמנו את הטענה הנכונה לכל שתי פונקציות $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ המקיימות

$$f(n) = g(n) \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

א. f חד-חד-ערכית אם ורק אם g חד-חד-ערכית.

ב. f על אם ורק אם g על.

$$\text{ג. } \text{Im}(f) \cap \mathbb{N} = \text{Im}(g) \cap \mathbb{N}$$

$$\text{ד. } \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$$

$$\text{ה. } f \circ g = g \circ f$$

ו. כל הטענות האחרות שגויות.

6) נסמן: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ונגדיר פונקציה $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ באופן הבא:

$$f(n) = \text{מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה במספר } n$$

$$\text{למשל: } f(10931) = 2, f(294) = 0$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין 6 הטענות הבאות: (הערה: $10^0 = 1$).

א. f הפיכה.

$$\text{ב. } \exists n \in \mathbb{N}_0 (10|n \wedge f(n+1) \leq f(n))$$

$$\text{ג. } f[\{10^n | n \in \mathbb{N}_0\}] \subset f[\{10^n + 11 | n \in \mathbb{N}_0\}]$$

$$\text{ד. } f[\{10^n | n \in \mathbb{N}_0\}] \subset f[\{10^n + 9 | n \in \mathbb{N}_0\}]$$

$$\text{ה. } f\left[\left\{\frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}\right] \subset \text{Im}(f)$$

ו. כל הטענות האחרות שגויות.

(7) נתונים שלושת הפסוקים הבאים :

$$\alpha = (Q \oplus R) \vee (P \wedge \neg Q)$$

$$\beta = P \wedge (Q \vee R)$$

"מבין המשתנים P, Q, R , יש מספר אי זוגי של משתנים שערכם $\varphi = \text{"false"}$ "

סמנו את הטענה הנכונה מבין 6 הטענות הבאות :

א. $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \varphi$

ב. $\beta \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \varphi$

ג. $\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \varphi$

ד. $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \varphi$

ה. $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \varphi$

ו. כל הטענות האחרות שגויות.

(8) סמנו את הטענה הנכונה לכל שתי קבוצות A, B :

א. אם לכל קבוצה C מתקיים $A \triangle C \subseteq B \triangle C$ אז $A = B$

ב. אם קיימת קבוצה C כך ש- $A \triangle C \subseteq B \triangle C$ אז $A = B$

ג. אם קיימת קבוצה C כך ש- $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$

ד. אם קיימת קבוצה C כך ש- $A \setminus C = B \setminus C$ אז $A = B$

ה. אם קיימת קבוצה C כך ש- $C \setminus A = C \setminus B$ אז $A = B$

ו. אם $A \setminus B = \emptyset$ או $B \setminus A = \emptyset$ אז $A = B$

(9)

נתונה הנוסחה הבאה :

$$Q(A) = \forall x \in \mathbb{R} (x \in A \setminus \{0,1,2,3,4\} \rightarrow x^2 \in \{24k + 1 | k \in \mathbb{Z}\})$$

מי מבין הפסוקים הבאים אמיתי לוגית ?

א. $Q(\mathbb{Q})$

ב. $Q(\mathbb{Z})$

ג. $Q(\mathbb{N})$

ד. $Q(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ אי זוגי}\})$

ה. $Q(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ אי זוגי}\})$

ו. $Q(\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ראשוני}\})$

(10)

נתונה הטענה הבאה :

$$P(A \setminus B) = (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\} : A, B \text{ מתקיים}$$

מי מבין זוגות הקבוצות הבאות מהוות דוגמה נגדית לטענה זו ?

א. $A = B = \{\phi\}$

ב. $A = \{\phi\}, B = \{2\}$

ג. $A = \{\phi\}, B = \{\phi, 2\}$

ד. $A = \{\phi, 1\}, B = \{\phi, 2\}$

ה. $A = \{1\}, B = \{\phi, 2\}$

ו. $A = \{2\}, B = \{\phi, 2\}$

(11) נתונות 3 הקבוצות הבאות :

$$A = \{3k - 2 | k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{4k - 2 | k \in \mathbb{Z}\}, \quad C = \{6k - 2 | k \in \mathbb{Z}\}$$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות :

א. $\forall x \in A (x \in C \leftrightarrow x - 3 \notin C)$

ב. $\forall x \in B (x \in C \leftrightarrow x - 4 \notin C)$

ג. $C \subset A$

ד. $A \cap B = B \cap C$

ה. $C \setminus B = \{4x | x \in A\}$

ו. $\{6t - 59999 | t \in \mathbb{N}\} \subset A \setminus C$