

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev



חשיבה מתמטית, 50452

אמיר גוריון, ארז איזנשטיין, עופר ברעם, אלי ברג'ל, אלבינה חייטין-חנקין.
תשפ"ג, סמסטר א', מועד א', 01/02/2023

מספר נבחן _____

**משך הבחינה: שלוש וחצי שעות
ללא חומר עזר**

לפניך בחינה בחלקים:
חלק א - שאלות פתוחות - 55 נקודות
חלק ב - שאלות סגורות - 45 נקודות
הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

יש להחזיר את דף התשובות ביחד עם טופס הבחינה, אחרת הבחינה לא תיבדק.

בהצלחה!

חלק א - שאלות פתוחות - 55 נקודותבחלק זה 3 שאלות פתוחות. יש לענות על שלושתן.

את התשובות יש לכתוב על גבי השאלון עצמו במקום המיועד לכך.

מחברות הטיוטה והנספחים לא יבדקו!

1. סעיף א' (9 נקודות):

בכל אחד משלושת הסעיפים הבאים רשמו פסוק השקול לשלילת הפסוק הנתון, מבלי להשתמש בסימן השלילה ($\neg$).
(כתבו תשובה סופית בלבד).

1א. $\exists x \forall y (x \geq y \rightarrow \exists z (x^2 < z \wedge y^2 < z))$

$$\forall x \exists y (x \geq y \wedge \forall z (x^2 \geq z \vee y^2 \geq z))$$

2א. $\exists x \forall y (x \geq y \wedge \exists z (x^2 < z \rightarrow y^2 < z))$

$$\forall x \exists y (x < y \vee \forall z (x^2 < z \wedge y^2 \geq z))$$

3א. $\forall x (\exists y (x \geq y) \vee \forall z \exists y (x^2 < z \vee y^2 < z))$

$$\exists x (\forall y (x < y) \wedge \exists z \forall y (x^2 \geq z \vee y^2 \geq z))$$

קוד מבחן: ~SM9K/1T/7T/9T

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, B\}$$

סעיף ב' (9 נקודות):

נתונות הקבוצות: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$.

- בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו דוגמה אחת לפונקציה $f: A \rightarrow P(A) \setminus P(B)$ העונה על דרישות הסעיף. (כל סעיף בפני עצמו).
- במידה ולא קיימת פונקציה העונה על הדרישות בסעיף, ציינו זאת. (אין צורך בהסברים נוספים).

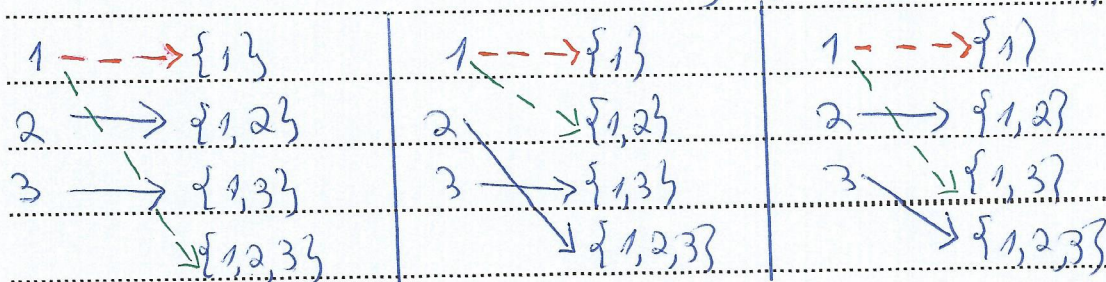
$$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$1. \text{Im}(f) = P(\{1\})$$

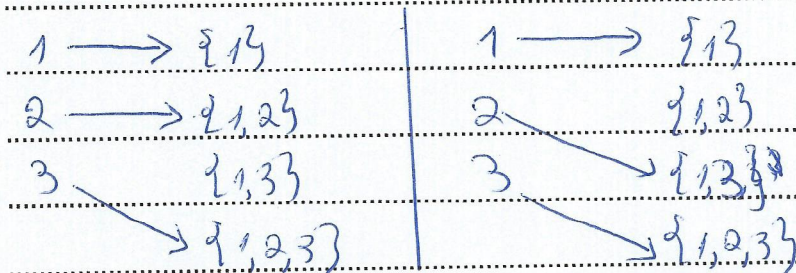
אין

2. $(\forall x \in A (x \in f(x))) \wedge (f \text{ חד - חד - ערכית})$

יש 6 אפשרויות:

3. $\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \subset f(x_2))$

יש 2 אפשרויות:



2. (18 נקודות) עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, קבעו האם הוא אמיתי לוגית בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{Z}$.

א. הפסוק: $\forall x \forall y (y > x \rightarrow (y \leq 0 \vee y^2 > x \cdot y))$

האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)

נתון $x, y \in \mathbb{Z}$. נבחין בין 2 מקרים:
 (1) $y \leq 0$. במקרה זה המסקנה אמיתית. במקרה כפוף
 מהצורה $T \rightarrow ?$ שהיא אמיתית.
 (2) סימני. נניח שצמצם ב- y גורם $y > x$ ולקבל $y > x$
 מקבלים $(x \vee y) \rightarrow (y > x)$ טענות $(y > x) \rightarrow (x \vee y)$ שהוא אמיתי.

ב. הפסוק: $\forall x (\forall y (y > x) \rightarrow \exists y (y \leq 0 \vee y^2 > x \cdot y))$

האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)

נתון $x \in \mathbb{Z}$. התנאי שקרי. נזכר $y = x$.
 (מקבלים) איך שזה שקרי, סדר מקבלים כפוף
 מהצורה $F \rightarrow ?$ שהוא אמיתי.

ג. הפסוק: $\forall x (\exists y (y > x) \rightarrow \forall y (y \leq 0 \vee y^2 > x \cdot y))$

האם הפסוק אמיתי לוגית? לא / לא (נקודה אחת). נימוק: (5 נקודות)

נזכר (לדעת $x=1$ (למעשה, כל $x \geq 1$).
 התנאי אמיתי: נזכר יחסי $y = x+1$ כי $x+1 > x$
 המסקנה שקרה: $\forall y (y \leq 0 \vee y^2 > y)$ נזכר (לדעת
 $y=1$ כי $1 \not\leq 0$ וגם $1^2 > 1$. מקבלים $T \rightarrow F$.

3. (19 נקודות) נתונות הפונקציות $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & x \in \{2n | n \in \mathbb{N}\} \\ \frac{3x+1}{2}, & x \in \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & x \in \{3n | n \in \mathbb{N}\} \\ \frac{2x+5}{3}, & x \in \{3n-1 | n \in \mathbb{N}\} \\ \frac{2x+7}{3}, & x \in \{3n-2 | n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

(הערה: חובה להוכיח על פי ההגדרה! הסבר אחר לא יתקבל!)

א. (9 נקודות) הוכיחו או הפריכו:

1. הפונקציה $f(x)$ היא חד-חד-ערכית.

2. הפונקציה $g(x)$ היא חד-חד-ערכית.

ב. (5 נקודות) חשבו את $f \circ g$. הציגו את שלבי החישוב! (יש לפשט את התשובות).

ג. (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $g \circ f$ הפיכה.

1א. (1) $f(x)$ תהיה הפונקציה: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

נניח $f(x_1) = f(x_2)$. נבדוק בין 3 מקרים:

1. x_1, x_2 זוגיים: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1}{2} = \frac{3x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

2. x_1, x_2 אי-זוגיים: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{2} = \frac{3x_2+1}{2} \Leftrightarrow 3x_1+1 = 3x_2+1 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1+1 = 3x_2+1 \Leftrightarrow$

3. x_1 זוגי, x_2 אי-זוגי (או עקב) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1}{2} = \frac{3x_2+1}{2} \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2+1$

$\Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2+1 \Leftrightarrow 3(x_1-x_2) = 1$

$\Leftrightarrow 3(x_1-x_2) = 1$ (אבל x_1-x_2 אינו מסוג 1/3)

כל המקרים שם שני המקרים לא יתקבלו, ולכן הפונקציה היא חד-חד-ערכית.

2א. (2) $g(x)$ לא תהיה הפונקציה: $x \in 3n-2$

$g(1) = \frac{2 \cdot 1 + 7}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$g(2) = \frac{2 \cdot 2 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$

$$g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (א)$$

$$\boxed{1} \quad g(f(x)) = g\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x = x$$

$$\boxed{2} \quad g(f(x)) = g\left(\frac{3x+1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{3x+1}{2}\right) + 5}{3} = \frac{3x+6}{3} = x+2$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x & , \text{אם } x \text{ זוגי} \\ x+2 & , \text{אם } x \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

(ב) $g \circ f$ לא הפכה מאחד לאחד, מכיוון ש:

$1 \notin \text{Im}(g \circ f)$

כלומר, אין $x \in \mathbb{N}$ כזה ש-

$$(g \circ f)(x) = 1 \quad \text{אם } x=1 \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1 \quad \text{אם } x=1 \quad \boxed{1}$$

$$x=-1 \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1 \quad \text{אם } x=-1 \quad \boxed{2}$$

חלק ב' – שאלות סגורות - 45 נקודות

בחלק זה 9 שאלות. יש לענות על כולן. משקל כל שאלה זהה – 5 נקודות לשאלה.
בכל שאלה יש לסמן את התשובה הנכונה ביותר (אחת בלבד), באופן ברור, בדף התשובות בלבד.
אם סימנת יותר מתשובה אחת – השאלה תיפסל!
תתקבלנה תשובות שנכתבו על דף התשובות בלבד. לא תבדקנה תשובות שלא תכתבנה בדף המיועד לכך.

(1)

- לפני הרבה הרבה שנים, בתוך יער עבות, היה כפר נסתר שבו חיו יצורים כחולים קטנטנים אשר קראו להם "דרדרסים". הם היו טובי לב ודיברו רק אמת.
לא רחוק משם חי גרגמל, המכשף הנורא. יום אחד הוא אמר "אני שונא דרדרסים!" והפך גוש חומר כחול לדרדרס רשע, דובר שקר בלבד. באמצע הלילה, הדרדרס הרשע הסתגן לתוך כפר הדרדרסים. למחרת בבוקר, דרדרס-אבא, מנהיג הדרדרסים, פגש באחד הדרדרסים.
מה לא יתכן שאותו דרדרס אמר לדרדרס-אבא ?
א. "אני דובר אמת."
ב. "אם אני דובר אמת אז אני דובר שקר."
ג. "אם אני דובר שקר אז אני דובר אמת."
ד. "אני דובר אמת אם ורק אם אני דובר אמת."
ה. "אני דובר אמת אם ורק אם אני דובר שקר."
ו. "אני דובר אמת או שאני דובר שקר."
ז. "אני דובר אמת וגם אני דובר שקר."

(2)

- נתונה הטענה: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים:
אם $C \subseteq A \cup B$ אז $(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = \emptyset$.
מי מבין ההצבות הבאות מהווה דוגמה נגדית לטענה זו ?
א. $A = \{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{3n + 2 | n \in \mathbb{Z}\}, C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$
ב. $A = \{4n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4n + 2 | n \in \mathbb{Z}\}, C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$
ג. $A = \{4n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4n + 3 | n \in \mathbb{Z}\}, C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$
ד. $A = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{8n + 3 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{8n + 5 | n \in \mathbb{Z}\}$
ה. $A = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{8n + 3 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{8n + 5 | n \in \mathbb{Z}\}$
ו. $C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$
ז. $A = B = C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$

(3)

נתונה הקבוצה $A = \mathbb{Z} \Delta [-1, 1]$ המוכלת בקבוצה האוניברסאלית $U = \mathbb{R}$.

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין הטענות הבאות:

א. $\overline{A} = \overline{\mathbb{Z}} \Delta \overline{[-1, 1]}$

ב. $\overline{A} = \mathbb{Z} \Delta ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$

ג. $A = (\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}) \Delta (-1, 1)$

ד. $A = (\mathbb{Z} \Delta (-1, 1)) \setminus \{-1, 1\}$

ה. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z} \leftrightarrow |x| \leq 1\}$

ו. $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mid |x| > 1\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$

(4)

נתונים שלושת הפסוקים הבאים:

$$\alpha = (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R), \quad \beta = (P \oplus Q \oplus R), \quad \gamma = (Q \leftrightarrow R)$$

מי מבין הפסוקים הבאים הוא טאוטולוגיה?

א. $\alpha \rightarrow \beta$

ב. $\alpha \rightarrow \gamma$

ג. $\beta \rightarrow \alpha$

ד. $\beta \rightarrow \gamma$

ה. $\gamma \rightarrow \alpha$

ו. $\gamma \rightarrow \beta$

(5)

סמנו את הטענה שאינה נכונה עבור כל שתי קבוצות A, B המקיימות $A \subseteq B$:

א. $P(A \cup B) = P(B)$

ב. $P(A \cap B) = P(A)$

ג. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ד. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ה. $P(B \setminus A) = (P(B) \setminus P(A)) \cup \{\phi\}$

ו. $P(A \setminus B) = (P(A) \setminus P(B)) \cup \{\phi\}$

6 נתונות שתי קבוצות A, B כך ש $A \neq B$ וגם $|A| = |B| = 2023$.
מי מבין הטענות הבאות תיתכן ?

- קיימת פונקציה על $f: A \cap B \rightarrow A$.
- קיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f: A \cup B \rightarrow A$.
- קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f: A \setminus B \rightarrow B \setminus A$.
- קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f: A \cap B \rightarrow A \triangle B$.
- קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ולא על $f: A \rightarrow B$.
- קיימת פונקציה על ולא חד-חד-ערכית $f: A \rightarrow B$.

7 נתון הפסוק הבא : $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$
ונתונות שלוש הטענות הבאות :

- הפסוק אמיתי כאשר : $R(x, y) = x < y$ בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{Z}$.
 - הפסוק אמיתי כאשר : $R(x, y) = x < y$ בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{R}$.
 - הפסוק אמיתי כאשר : $R(x, y) = (x|y \wedge x \neq y)$ בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{N}$.
- מי מבין שלוש הטענות הללו נכונה בהכרח?
- רק טענה I.
 - רק טענה II.
 - רק טענה III.
 - רק טענות I, II.
 - רק טענות I, III.
 - רק טענות II, III.
 - כל שלוש הטענות.

8 נגדיר פונקציה $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ באופן הבא :

סיפרת האחדות של המספר n $g(n) =$ (לדוגמה : $g(32) = 2$, $g(714) = 4$)
סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות :

- $g[\{15k \mid k \in \mathbb{N}\}] \subset g[\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}]$.
- $g[\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}] \subset g[\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}]$.
- $\forall n \in \mathbb{N} (g(n+1) > g(n) \oplus \exists k \in \mathbb{N} (n = 10k - 1))$.
- קיימת $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$ וגם $g \circ f = Id_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$.
- $\text{Im}(g) = [0, 9]$.
- כל 5 הטענות האחרות הן שקריות.

9

נתונות הקבוצה האוניברסאלית $U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 120\}$ ושלוש תת-קבוצות שלה:

$$A_4 = \{n \in U \mid 4|n\}, A_5 = \{n \in U \mid 5|n\}, A_6 = \{n \in U \mid 6|n\}.$$

מהו גודל הקבוצה $A_4 \cup A_5 \cup A_6$?

א. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 55$

ב. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 56$

ג. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 60$

ד. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 61$

ה. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 72$

ו. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 73$

ז. $|A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 74$