

חשיבה מתמטית – 50450002 - בחינה סופית

סמסטר ג' תשפ"ב, תאריך: 12.08.22

משך הבחינה – 3.5 שעות ; חומר עזר – אסור.

מרצים: ד"ר אבי גורן, אלי ברג'ל, אלבינה חייטין-חנקין, אמיר גוריון.

לפניך בחינה בשני חלקים :

חלק א' – שאלות פתוחות – 55 נקודות.

חלק ב' – שאלות סגורות – 45 נקודות.

הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

יש להחזיר את דף התשובות ביחד עם הבחינה, אחרת הבחינה לא תבדק!

בהצלחה!

חלק א' – שאלות פתוחות - 55 נקודות

בחלק זה 2 שאלות פתוחות. יש לענות על שתיהן.

את התשובות יש לכתוב על גבי השאלון עצמו במקום המיועד לכך.

מחברות הטיוטה והנספחים לא יבדקו!

1 סעיף א' (9 נקודות):

בכל אחד משלושת הסעיפים הבאים רשמו פסוק השקול לשלילת הפסוק הנתון, מבלי להשתמש בסימן השלילה ($\neg$). (כתבו תשובה סופית בלבד).

$$א1. \exists x \forall z \left(\left((\exists y (6x > y^9)) \vee (z < x) \right) \rightarrow (\forall y (z < xy)) \right)$$

$$א2. \exists x \left((\exists y (6x > y^9)) \vee \forall z (z < x \rightarrow \forall y (z < xy)) \right)$$

$$א3. \exists x \left((\exists y (6x > y^9)) \rightarrow \forall z (z < x \vee \forall y (z < xy)) \right)$$

סעיף ב' (15 נקודות):

עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, קבעו האם הוא אמיתי לוגית בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{Z}$.

ב1. הפסוק: $\exists y \forall x (x > y^2 \leftrightarrow xy^2 > y^2)$

האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (4 נקודות)

ב2. הפסוק: $\forall x (\exists y (x > y^2) \leftrightarrow \exists y (xy^2 > y^2))$

האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (4 נקודות)

ב3. הפסוק: $(\forall x \exists y (x > y^2)) \rightarrow (\forall x \exists y (xy^2 > y^2))$

האם הפסוק אמיתי לוגית? כן / לא (נקודה אחת). נימוק: (4 נקודות)

(2) סעיף א' (12 נקודות):

נתונה הקבוצה: $A = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$

- בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו דוגמה אחת לפונקציה $f: A \rightarrow A$ העונה על דרישות הסעיף.
(כל סעיף בפני עצמו).
- במידה ולא קיימת פונקציה העונה על הדרישות בסעיף, ציינו זאת. (אין צורך בהסברים נוספים).

$\forall x \in A (x \in f(x) \vee f(x) \in x) \quad (2א)$	$\text{Im}(f) = A \cap P(A) \quad (1א)$
$(f \circ f \neq Id_A) \wedge (f \text{ הפיכה}) \quad (4א)$	$(f \text{ חח"ע}) \wedge (\text{Im}(f) \subset A) \quad (3א)$

סעיף ב' (19 נקודות):

נסמן: $K = \left\{ \frac{9n-50}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$. נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ המוגדרת באמצעות הכלל: } f(x) = \frac{x^3+7}{2x^3-5}$$

$$g: K \rightarrow \mathbb{Z} \text{ המוגדרת באמצעות הכלל: } g(x) = \frac{2x+5}{9}$$

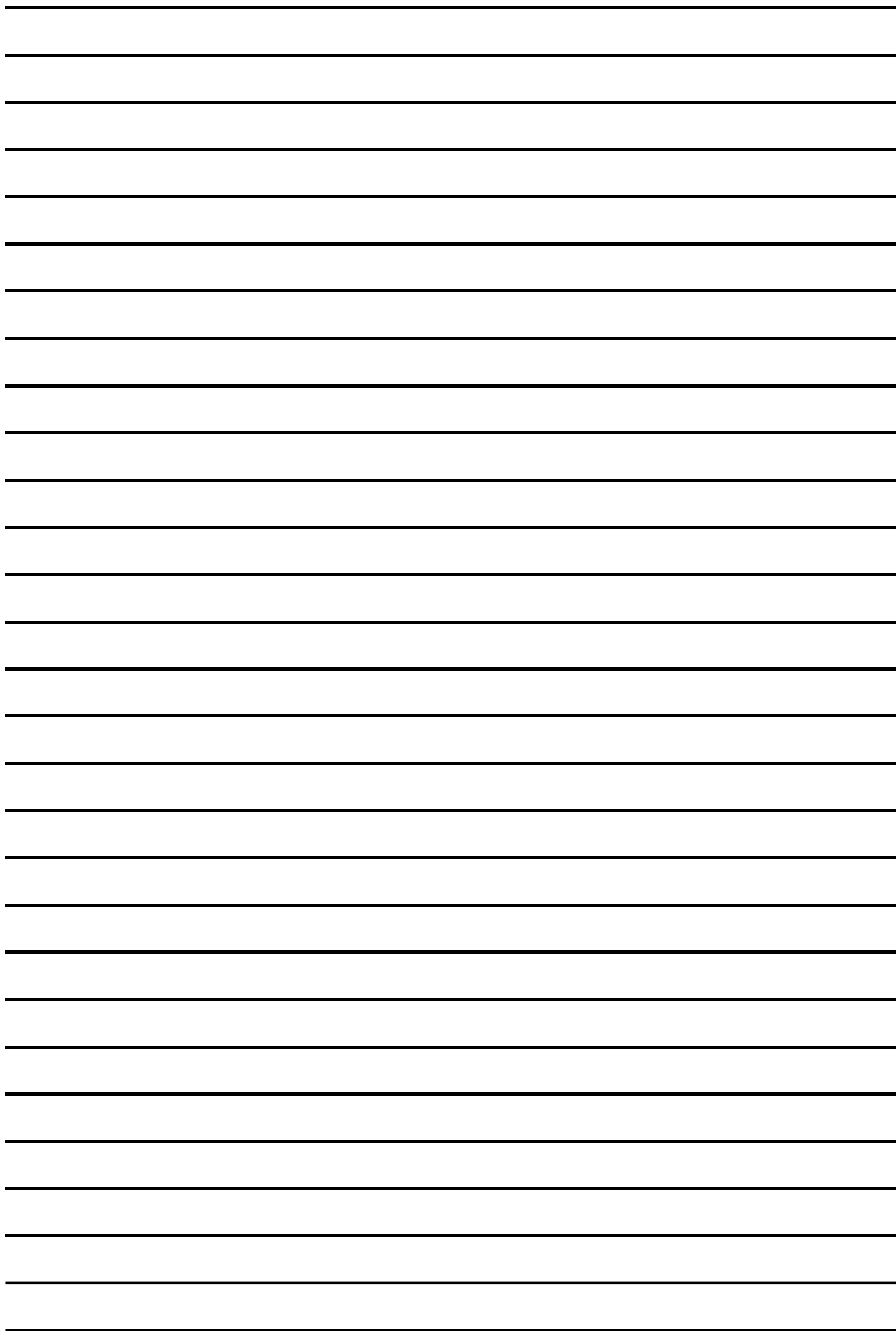
הוכיחו את הטענות הבאות: (חובה להוכיח על פי ההגדרה! הסבר אחר לא יתקבל!)

ב1. (7 נקודות) הפונקציה $g(x)$ היא על.

ב2. (6 נקודות) הפונקציה $f(x)$ היא חד-חד-ערכית.

33. (6 נקודות) הפונקציה $h: K \rightarrow \mathbb{Q}$ המוגדרת באמצעות הכלל $h(x) = f(g(x))$ היא חד-חד-ערכית.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



חלק ב' – שאלות סגורות - 45 נקודות

בחלק זה 9 שאלות. יש לענות על כולן. משקל כל שאלה זהה – 5 נקודות לשאלה.
בכל שאלה יש לסמן את התשובה הנכונה ביותר (אחת בלבד), באופן ברור, בדף התשובות בלבד.
אם סימנת יותר מתשובה אחת – השאלה תיפסל!
תתקבלנה תשובות שנכתבו על דף התשובות בלבד. לא תבדקנה תשובות שלא תכתבנה בדף המיועד לכך.

(1)

- בהגיעכם אל טירה שבגבולה המערבי של הממלכה הקסומה של נרניה, אתם פוגשים באריה, במכשפה, ובארון בגדים.
- האריה אומר: "אם הייתי פעם מלך בנרניה – אז המכשפה לא הייתה אף פעם מלכה בנרניה".
המכשפה אומרת: "אם הייתי פעם מלכה בנרניה – אז ארון הבגדים לא היה אף פעם מלך בנרניה".
ארון הבגדים אומר: "מבין האריה והמכשפה, בדיוק אחד מהשניים היה פעם מלך בנרניה".
ידוע כי לפחות אחד מהדוברים אמר אמת ולפחות אחד מהדוברים שיקר.
- קבעו מי מבין הטענות הבאות היא מסקנה ודאית מדבריהם של האריה, המכשפה וארון הבגדים:
- האריה לא היה אף פעם מלך בנרניה.
 - האריה היה פעם מלך אם ורק אם ארון הבגדים לא היה אף פעם מלך בנרניה.
 - האריה, המכשפה וארון הבגדים, כולם היו פעם מלכים בנרניה.
 - המכשפה הייתה פעם מלכה בנרניה אם ורק אם האריה שיקר.
 - המכשפה אמרה אמת אם ורק אם ארון הבגדים שיקר.
 - אם האריה אמר אמת, אז ארון הבגדים היה פעם מלך.

(2)

נתונה הפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הבאה: $f(n) = 3n - (-1)^n$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- f חד-חד-ערכית.
- $\{6t + 5 | t \in \mathbb{N}\} \subset f[\{2t | t \in \mathbb{N}\}]$
- $\forall k \in \mathbb{N} (f(2k) - 1 = f(2k - 1))$
- $\forall n \in \mathbb{N} 3 | (f(n + 1) + f(n))$
- $\forall n \in \mathbb{N} (f(n + 1) - f(n) = 3 + (-1)^n \cdot 2)$
- מבין 5 הטענות האחרות, ישנן בדיוק 4 טענות נכונות.

(3)

נתון הפסוק: $\alpha = (Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow \neg P)$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- $\alpha \Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
- $\alpha \Leftrightarrow ((P \oplus Q \oplus R) \vee (\neg P \wedge (Q \leftrightarrow R)))$
- $P \wedge Q \wedge R \Rightarrow \neg \alpha$
- $\neg \alpha \Leftrightarrow ((Q \vee R) \wedge P)$
- $\neg \alpha \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$
- הפסוק α הוא לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

(4) נתונה הקבוצה הבאה: $C = P(\{1,7\})$. סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- א. $C \cap \mathbb{N} \in C$.
- ב. $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} \in C$.
- ג. $[1, 7) \Delta (1, 7] \in C$.
- ד. $\{1, \{1,7\}\} \Delta \{\{1,7\}, 7\} \in C$.
- ה. $C \setminus (P(\{1\}) \cup P(\{7\})) \in C$.
- ו. מבין 5 הטענות האחרות, ישנן בדיוק 4 טענות נכונות.

(5) סמנו את הטענה שאינה נכונה לכל שתי קבוצות סופיות לא ריקות A, B :

- א. אם $|A \cap B| = 0$ אז $|P(A)| = |P(A) \setminus P(B)|$.
- ב. אם $|A \cap B| = 1$ אז $|P(A)| = 2 \cdot |P(A \setminus B)|$.
- ג. אם $|A \cup B| = |A \cap B|$ אז $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.
- ד. אם $|A \cup B| - |A \cap B| = 1$ אז $(A \subseteq B \vee B \subseteq A)$.
- ה. אם $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ אז קיימת פונקציה הפיכה $f: A \rightarrow B$.
- ו. אם $(A \subset B \wedge B \subset A)$ אז קיימת פונקציה הפיכה $f: A \rightarrow B$.

(6) לכל שתי קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר פעולה חדשה שנסמנה $\nabla_{\mathbb{R}}$ באופן הבא:

$$A \nabla_{\mathbb{R}} B = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \leftrightarrow x \in B\}$$

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין 6 הטענות הבאות:

- א. לכל $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $(A \nabla_{\mathbb{R}} B) \cap C = C \setminus (A \Delta B)$.
- ב. לכל $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $(A \nabla_{\mathbb{R}} B) \nabla_{\mathbb{R}} C = A \nabla_{\mathbb{R}} (B \nabla_{\mathbb{R}} C)$.
- ג. לכל $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $(A \nabla_{\mathbb{R}} B) \cup C = (A \cup C) \nabla_{\mathbb{R}} (B \cup C)$.
- ד. לכל $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ אם $A \cap B \cap C = \emptyset$ אז $(A \nabla_{\mathbb{R}} B) \Delta C = \mathbb{R} \setminus (A \cup B \cup C)$.
- ה. $(-8, 9) \nabla_{\mathbb{R}} [1, \infty) = [1, 9) \cup (-\infty, -8]$.
- ו. $(-\infty, -1] \nabla_{\mathbb{R}} (1, \infty) = (-\infty, 1] \nabla_{\mathbb{R}} (-1, \infty)$.

(7) מי מבין הטענות הבאות אינה בהכרח נכונה עבור כל פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

- א. $(\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} f(x) = y) \vee (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} (x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)))$.
- ב. $(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} f(x) = y) \wedge (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} (f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow x_1 \neq x_2))$.
- ג. $|Im(f)| \leq 2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \forall x_3 \in \mathbb{R} (f(x_1) = f(x_3) \vee f(x_2) = f(x_3))$.
- ד. $|Im(f)| \geq 2 \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} (f(x_1) \neq f(x_2))$.
- ה. קיימת $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f \circ g = g \circ f$.
- ו. לכל $A, B \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $f[A \setminus B] = \{f(a) | a \in A \wedge a \notin B\}$.

(8)

נתונה הנוסחה הבאה: $R(x, y) = 8 \mid (3x + 5y)$ בקבוצת ההתייחסות $\mathbb{N}$,
ונתונות שלוש הטענות הבאות:

$$(I) \quad \forall x R(x, x)$$

$$(II) \quad \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$$

$$(III) \quad \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \forall z R(x + z, y + z))$$

מי מבין שלוש הטענות הללו נכונה בהכרח?

- א. רק טענה I.
- ב. רק טענה II.
- ג. רק טענה III.
- ד. רק טענות I, II.
- ה. רק טענות I, III.
- ו. רק טענות II, III.
- ז. כל שלוש הטענות.

(9)

במסגרת התוכנית "נתיב לאקדמיה" לומדים התלמידים שלושה קורסים: אוריינות, אנגלית ומתמטיקה.
מסקר שנערך בין התלמידים עולה כי:

- מספר התלמידים שאוהבים רק אוריינות שווה למספר התלמידים שאוהבים רק אנגלית.
- מספר התלמידים שאוהבים אוריינות ואנגלית שווה למספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואנגלית.
- מספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואוריינות שווה למספר התלמידים שאוהבים רק מתמטיקה.
- אין תלמידים שלא אוהבים את כל שלושת הקורסים.

מי מבין המסקנות הבאות אינה בהכרח נכונה:

- א. מספר התלמידים שאוהבים אוריינות שווה למספר התלמידים שלא אוהבים אוריינות.
- ב. מספר התלמידים שאוהבים אוריינות ולא אוהבים מתמטיקה שווה למספר התלמידים שאוהבים אנגלית ולא אוהבים אוריינות.
- ג. מספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ולא אוהבים אוריינות שווה למספר התלמידים שאוהבים אוריינות ועוד מקצוע אחד לפחות.
- ד. אם מספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואנגלית ולא אוהבים אוריינות שווה למספר התלמידים שאוהבים רק אוריינות, אז מספר התלמידים שאוהבים בדיוק מקצוע אחד מהשלושה שווה למספר התלמידים שאוהבים בדיוק שנים משלושת המקצועות.
- ה. אם מספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואנגלית ולא אוהבים אוריינות שווה למספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואוריינות ולא אוהבים אנגלית, אז מספר התלמידים שאוהבים בדיוק אחד מהמקצועות אוריינות או מתמטיקה שווה למספר התלמידים שאוהבים בדיוק אחד מהמקצועות אנגלית או מתמטיקה.