

חשיבה מתמטית – 50450002 - בוחן אמצע

סמסטר ב' תשפ"ג, תאריך: 28.04.23

משך הבחינה – 3 שעות ; חומר עזר – אסור.

מרצים: אלי ברג'ל, אמיר גוריון, אלבינה חייטין-חנקין, עופר ברעם, ארז איזנשטיין, יוסף חפץ, אבי גורן, ויקטור ניקולאייבסקי.

לפניך בחינה בארבעה חלקים:

חלק א' – שאלות פתוחות – 30 נקודות.

חלק ב' – שאלות סגורות – 12 נקודות.

חלק ג' – שאלות סגורות – 16 נקודות.

חלק ד' – שאלות סגורות – 42 נקודות.

הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

יש להחזיר את דף התשובות ביחד עם הבחינה, אחרת הבחינה לא תבדק!

בהצלחה!

חלק א (30 נקודות)

בחלק זה 3 שאלות פתוחות. יש לענות על השאלות בטופס הבחינה במקום המיועד לכך.

(1) (9 נקודות)

בישיבת הצוות של אוריינות עברית שהתקיימה במרץ 2023 דנו המרצות בשאלה אם הבוחן שהתקיים בשבוע שעבר צריך להיות קל או משוחזר. נסמן:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| A – מירי הציעה שהבוחן יהיה קל. | P – מירי הציעה שהבוחן יהיה משוחזר. |
| B – שלי הציעה שהבוחן יהיה קל. | Q – שלי הציעה שהבוחן יהיה משוחזר. |
| C – דור הציעה שהבוחן יהיה קל. | R – דור הציעה שהבוחן יהיה משוחזר. |
| D – איילת הציעה שהבוחן יהיה קל. | S – איילת הציעה שהבוחן יהיה משוחזר. |
- הצרינו את הפסוקים הבאים:

א. רוב המרצות (לפחות 3) הציעו שהבוחן יהיה משוחזר.

ב. אם בדיוק שתיים מהמרצות, בהן איילת, הציעו שהבוחן יהיה קל, אז מספר אי זוגי של מרצות הציעו שהבוחן יהיה משוחזר.

ג. שלי הציעה הצעה הפוכה מההצעה של מירי.

(2) (9 נקודות)

נתונים הפסוקים: $\alpha := (A \leftrightarrow B) \wedge C$, $\beta := (A \leftrightarrow C) \wedge B$, $\gamma := A \vee (B \leftrightarrow C)$

הוכיחו באמצעות זהויות את הזהות: $\alpha \vee \neg\gamma \Leftrightarrow \beta \vee \neg\gamma$. (הוכחה אחרת לא תתקבל).

- יש להתחיל את ההוכחה מלהעתיק את הפסוק שבאחד האגפים ולסיים אותה עם הפסוק המופיע באגף השני.
- בכל מעבר מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל אחד מהמעברים חובה לכתוב את סימן השקילות הלוגית ($\Leftrightarrow$ או $\Im$).

[illegible]

(3) (12 נקודות)

- בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו דוגמה אחת לקבוצה L לא ריקה העונה על דרישות הסעיף. (כל סעיף בפני עצמו).
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על הדרישות בסעיף, ציינו זאת. (במקרה זה, אין צורך בהסברים נוספים).

א. $((-5.5, \sqrt{3}) \subset L) \wedge (L \subset [-5.5, \sqrt{3}])$

ב. $((-5.5, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q} \subset L) \wedge (L \subset [-5.5, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q})$

ג. $(L \subset \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Q} \subset L)$

ד. $L \triangle \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

ה. $L \triangle \{\phi\} = L \cup \{\phi\}$

ו. $L \setminus \{\phi\} = L \cup \{\phi\}$

חלק ב (12 נקודות)

על כוכב הלכת סייברטרון מתגוררים חייזרים רובוטים המסוגלים לשנות את צורתם, מדמויי אדם לכלי רכב, ואשר מפולגים בין שתי סיעות יריבות: "הרובוטיקים" הטובים, הדוברים רק אמת, ו-"השקרניקים" הרעים, הדוברים רק שקר.

כאשר שני שקרניקים בורחים מסייברטרון אל כדור הארץ, שני רובוטיקים יוצאים בעקבותיהם. כל הארבעה פוגשים בנער בשם סם, ומיד משנים את צורתם ל: משאית סמי-טריילר, טרקטור, אמבולנס ואופנוע.

אומר הסמי-טריילר: "אם האמבולנס רובוטיק אז אני רובוטיק".

אומר הטרקטור: "האמבולנס שקרניק והסמי-טריילר רובוטיק".

אומר האמבולנס: "הטרקטור שקרניק או האופנוע שקרניק".

האופנוע אינו אומר דבר. עזרו לסם לקבוע את נכונות הטענות שבשאלות 1-6:

1) לאיזו סיעה שייך הסמי-טריילר ?

- א. לרובוטיקים.
- ב. לשקרניקים.
- ג. לא ניתן לקבוע.

2) לאיזו סיעה שייך האמבולנס ?

- א. לרובוטיקים.
- ב. לשקרניקים.
- ג. לא ניתן לקבוע.

3) לאיזו סיעה שייך הטרקטור ?

- א. לרובוטיקים.
- ב. לשקרניקים.
- ג. לא ניתן לקבוע.

4) לאיזו סיעה שייך האופנוע ?

- א. לרובוטיקים.
- ב. לשקרניקים.
- ג. לא ניתן לקבוע.

5) הסמי-טריילר והאופנוע שייכים לסיעות שונות.

- א. נכון.
- ב. לא נכון.
- ג. לא ניתן לקבוע.

6) הסמי-טריילר והאמבולנס מאותה הסיעה, אם ורק אם האופנוע רובוטיק.

- א. נכון.
- ב. לא נכון.
- ג. לא ניתן לקבוע.

חלק ג (16 נקודות)

נתונות שתי הקבוצות הבאות: $A = \left\{ \frac{x-2}{x+2} \mid x \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left[\frac{1}{5}, \frac{1,000,001}{1,000,005} \right]$

עבור כל אחת מהטענות שבשאלות 7-14, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה עבור קבוצות אלו.

(7) $0.\overline{73} \in A$ ($0.\overline{73}$ הוא השבר המחזורי האינסופי $0.7333333333 \dots$).

א. נכון.

ב. לא נכון.

(8) $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset A$

א. נכון.

ב. לא נכון.

(9) $\{t \in \mathbb{Q} \mid 9t^3 = t\} \subset A \cap \left\{ \frac{k}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

א. נכון.

ב. לא נכון.

(10) $A \cap B$ היא קבוצה אינסופית.

א. נכון.

ב. לא נכון.

(11) $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid \neg \left(a < \frac{1,000,001}{1,000,005} \rightarrow a < \frac{1}{5} \right) \right\} \subset B$

א. נכון.

ב. לא נכון.

(12) $\mathbb{Q} \cap B \subset A$

א. נכון.

ב. לא נכון.

(13) $\mathbb{Z} \cap B \subset \mathbb{Z} \cap A$

א. נכון.

ב. לא נכון.

(14) $\left\{ \frac{1}{x} \mid x \in B \right\} = (1, 5]$

א. נכון.

ב. לא נכון.

חלק ד' (42 נקודות)

בכל שאלה יש לסמן את התשובה הנכונה ביותר (אחת בלבד), באופן ברור, בדף התשובות בלבד.
אם סימנת יותר מתשובה אחת - השאלה תיפסל!
תתקבלנה תשובות שנכתבו על גבי דף התשובות בלבד.
לא תבדקנה תשובות שלא תכתבנה בדף המיועד לכך.

15) נתונה הטענה הבאה - לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים:

$$A = B \text{ או } (A \setminus C) \cup (C \setminus B) \subseteq A \cap B$$

מי מבין ההצבות הבאות מהווה דוגמה נגדית לטענה?

- $A = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, B = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 49\}$
- $A = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, B = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}, C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 49\}$
- $A = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 49\}$
- $A = \{7x \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 49\}$
- $A = \{7(x-1) \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 49\}$
- $A = \{7(x-1) \mid x \in \mathbb{N}\}, B = \{7|x| \mid x \in \mathbb{Z}\}, C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 49\}$

16) מי מבין הטענות הבאות נכונה לכל שלוש קבוצות A, B, C ?

- אם $A \subseteq B \triangle C$ אז $B \cap C \not\subseteq A$
- אם $A \triangle B \subseteq A \triangle C$ אז $(B \subseteq A \cup C \text{ וגם } A \cap C \subseteq B)$
- אם $A \cap B \cap C = \emptyset$ אז $(A \cap B = \emptyset \text{ או } A \cap C = \emptyset \text{ או } B \cap C = \emptyset)$
- $A \triangle B \triangle C = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$
- $(A \cap B) \triangle (A \cap C) \triangle (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \triangle B \triangle C \subseteq A \triangle (B \cup C)$

17) נתון הפסוק $\alpha := (P \oplus Q) \rightarrow (P \wedge \neg R)$. עבור איזה פסוק β , הפסוק

$$([P \wedge (R \rightarrow Q)] \vee \beta) \leftrightarrow \alpha$$

- $\beta := P \leftrightarrow Q$
- $\beta := \neg P \wedge \neg Q$
- $\beta := \neg Q \wedge \neg(P \wedge R)$
- $\beta := (P \oplus Q \oplus R) \vee \neg(P \vee Q \vee R)$
- $\beta := (Q \rightarrow P) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge R)$

18) מי מבין הפסוקים הבאים אינו שקול לפסוק: "אם בלילות האחרים אנו אוכלים חמץ או מצה, אז הלילה הזה אנו אוכלים מצה" ?

- בלילות האחרים אנו לא אוכלים חמץ ולא אוכלים מצה או שהלילה הזה אנו אוכלים מצה.
- בלילות האחרים אנו לא אוכלים חמץ ולא אוכלים מצה או ש(הלילה הזה אנו אוכלים מצה ובלילות האחרים אנו אוכלים חמץ או מצה).
- (בלילות האחרים אנו לא אוכלים חמץ ולא אוכלים מצה) או (בלילות האחרים אנו אוכלים חמץ והלילה הזה אנו אוכלים מצה) או (בלילות האחרים אנו אוכלים מצה והלילה הזה אנו אוכלים מצה).
- (בלילות האחרים אנו אוכלים חמץ או מצה אם ורק אם הלילה הזה אנו אוכלים מצה) או (בלילות האחרים אנו לא אוכלים חמץ ולא אוכלים מצה והלילה הזה אנו אוכלים מצה).
- אם הלילה הזה אנו לא אוכלים מצה אז בלילות האחרים אנו לא אוכלים חמץ ולא אוכלים מצה.
- (אם בלילות האחרים אנו אוכלים חמץ אז הלילה הזה אנו אוכלים מצה) או (אם בלילות האחרים אנו אוכלים מצה אז הלילה הזה אנו אוכלים מצה).

19) ידוע שלפחות אחת משתי הטענות הבאות היא אמת:

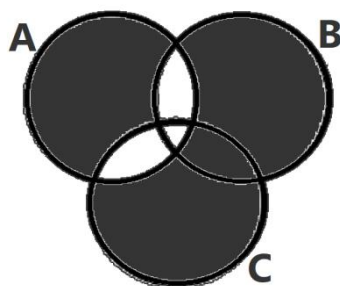
- יעל אוהבת את איתי וגם (יעל אוהבת לאכול פתיתים אם ורק אם היא אוהבת רוק כבד).
 - יעל אוהבת לאכול פתיתים או (יעל אוהבת את איתי אם ורק אם היא אוהבת רוק כבד).
- כמו כן ידוע כי יעל לא אוהבת לאכול פתיתים.
- ניתן להסיק שאם יעל אוהבת רוק כבד אז היא אוהבת את איתי.
 - ניתן להסיק שאם יעל אוהבת רוק כבד אז היא לא אוהבת את איתי.
 - ניתן להסיק שאם יעל לא אוהבת רוק כבד אז היא אוהבת את איתי.
 - ניתן להסיק שאם יעל לא אוהבת רוק כבד אז היא לא אוהבת את איתי.
 - לא ניתן להסיק בוודאות אף אחת מהמסקנות שבסעיפים האחרים.

20) נתונה הקבוצה: $A = \{\{3, \phi\}, \phi, 5\}$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

- $(A \setminus \mathbb{Z} = \{\{\phi\}, \phi\}) \vee (A \setminus \mathbb{Z} = \{\{\phi\}, \phi\})$
- $(A \setminus \{\phi, 5\} \subset A \setminus \{\phi, 3\}) \rightarrow (A \setminus \{\phi, 5\} \in A \setminus \{\phi, 3\})$
- $(A \cap \mathbb{Z} \subset \{4 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) \rightarrow (A \cap \mathbb{Z} \subset \{\mathbb{N}\})$
- $(\{\phi, 5\} \Delta \{\phi, 3\} \in A) \oplus (\{\phi, 5\} \cap \{\phi, 3\} \in A)$
- $(\{n \in \mathbb{N} \mid 3n = 5n\} \subset A) \oplus (\{n \in \mathbb{N} \mid 3n = 5n\} \in A)$

(21) מי מבין הביטויים הבאים אינו מייצג את הקבוצה הצבועה באפור בדיאגרמת וואן הבאה :



א. $A \Delta (B \cup C)$

ב. $((A \Delta B) \cup C) \setminus (A \cap C)$

ג. $((A \Delta C) \cup B) \setminus (A \cap B)$

ד. $((A \Delta B) \cup C) \cap ((A \Delta C) \cup B)$

ה. $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap (B \cup C))$