

מבחן אמצע 2022 ב' – שחזור

פתרון

תאריך הבחינה – 08.04.2022

שאלה מספר 1: (14 נק')

נתונה הקבוצה $A = (-\infty, -2] \cup (-1, 1] \cup [2, \infty)$ המוכלת בקבוצה האוניברסלית $U = \mathbb{R}$. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:

$$A \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad \text{F}$$

$$\overline{A} = (-2, 1] \Delta [-1, 2] \quad \text{F}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1 \vee |x| \geq 2\} \subset A \quad \text{T}$$

$$\left\{ \frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \overline{A} \quad \text{T}$$

$$X \setminus A = ((-2, -1] \cap X) \cup ((1, 2) \cap X) \quad \text{T}$$

$$A \subseteq \{-x \mid x \in A\} \quad \text{F}$$

$$\overline{A} \cap \mathbb{N} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x^8 - 8x^6 + 15x^4 + 8x^2 = 16\} \quad \text{T}$$

שאלה מספר 2: (10 נק')

בשעשועון ההיכריות "בליינד דייט" מתמודדת אחת מראיינת שלושה גברים המוסתרים ממנה מאחורי וילון, ובהתאם לתשובותיהם - עליה לבחור אחד מהם איתו תצא לדייט.

באחת התוכניות, נודע למתמודדת מבעוד מועד, שכל אחד משלושת המתמודדים הוא או ספונטני או בעל חוש הומור, אך לא שניהם.

בתגובה לאחת משאלותיה של המתמודדת, השיבו המתמודדים כדלהן:

מתמודד א' השיב: אני ספונטני אם ורק אם מתמודד ב' בעל חוש הומור.

מתמודד ב' השיב: "בדיוק אחד משלושתנו הוא בעל חוש הומור".

מתמודד ג' השיב: "אם אני ספונטני, אז לפחות אחד משני המתמודדים האחרים הוא בעל חוש הומור".

ידוע שלפחות שניים מהמתמודדים הם בעלי חוש הומור ולפחות שניים מהם אמרו אמת בתשובותיהם.

על פי נתונים אלו, קבעו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, האם הוא נכון, לא נכון או שלא ניתן לקבוע.

אם מתמודד ב' ספונטני, אז הוא אמר אמת בתשובתו. **לא ניתן לקבוע**

מתמודד ב' אמר אמת בתשובתו. **לא נכון**

מתמודד ג' הוא בעל חוש הומור. **נכון**

בדיוק שניים מבין המתמודדים הם בעלי חוש הומור. **נכון**

מתמודד א' ספונטני. **לא ניתן לקבוע**

שאלה מספר 3: (8 נק')

נתונות 3 קבוצות סופיות: A, B, C המוכלות בקבוצה האוניברסלית U .

הערות:

- אתם רשאים להשאיר את התשובה עם פעולות אריתמטיות.
 - אם למשל החישוב המתאים לפתרון הוא $31+54-25$, ניתן לכתוב בתיבת התשובה 60 או $31+54-25$.
 - אם למשל החישוב המתאים לפתרון הוא $\frac{2100}{14}$, ניתן לרשום בתיבת התשובה $2100/14$ או 150.

(א) (3 נקודות) נתון כי:

$$|A \cap C| = 13$$

$$|B \cap C| = 18$$

$$|(A \cup B) \cap C| = 24$$

חשבו:

$$|A \cap B \cap C| = \boxed{7}$$

(ב) (3 נקודות) נתון בנוסף כי:

$$|A \Delta B \Delta C| = 30$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 7$$

$$|U| = 61$$

חשבו:

$$|(A \cap B) \setminus C| = \boxed{7}$$

(ג) (2 נקודות) נתון בנוסף שהקבוצה $(A \cup B) \setminus C$ היא קבוצה ריקה. האם יתכן ש $|A| = |B|$?

(No answer given) ☐

Yes

No

Can not be determined

שאלה מספר 4: (8 נק')

בכל אחד מהסעיפים הבאים מיצאו דוגמה אחת לקבוצה לא ריקה X המקיימת את דרישות הסעיף (כל סעיף בפני עצמו).

- במידה וקיימת קבוצה כזו, רשמו אותה בחלונית התשובה בצורה מפורשת באמצעות סוגריים מסולסלים, כשביניהם איברי הקבוצה מופרדים באמצעות פסיקים. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. (שימו לב שלא טעיתם בהקלדת התשובות, למשל: שלא שכחתם אף סוגר או פסיק ושלא רשמתם את הסוגר בכיוון ההפוך). במידה ותרצו לרשום את אחת מהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, הקלידו פשוט N, Z, Q, R (אות גדולה).
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על דרישות הסעיף, רשמו בחלונית התשובה NO או סח. (אל תשאירו את החלונית ריקה)
- **בשאלה זו אסור לרשום תשובה באמצעות שבר עשרוני!** (במידת הצורך, השתמשו בסימן החילוק /).

נתונה הקבוצה:

$$A = \{1.5\bar{3}, -6, \mathbb{Z}\}$$

(א) $\phi \subset A \cap X \subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

$X =$

(ב) $\{\mathbb{Z}\} \subset X \subset A$

$X =$

(ג) $\{\mathbb{N}\} \subset X \subset \{\mathbb{Q}\}$

$X =$

(ד) $[(X \cap (\mathbb{Z} \cap A) = \phi) \leftrightarrow (X \cap (\mathbb{Z} \setminus A) = \phi)] \wedge [X \subseteq \mathbb{Z}]$

$X =$

שאלה מספר 5: (6 נק')

נתונות הקבוצות:

$$A = \{\{-26\}, 28, \{\phi\}\} \setminus \{\phi\}$$

$$B = \{\{-26\}, 28, \{\phi\}\} \setminus \phi$$

$$C = \{\{-26\}, 28, \phi\} \setminus \{\phi\}$$

$$D = \{\{-26\}, 28, \phi\} \setminus \phi$$

מי מבין הקבוצות הנ"ל שווה לקבוצה:

$$E = \{\{-26\}, -14, \{\phi\}\} \Delta \{28, -14, \{\phi\}\}$$

(No answer given) ☐

$$E = A$$

$$E = B$$

$$E = C$$

$$E = D$$

None of the above

שאלה מספר 6: (6 נק')

מי מבין הפסוקים הבאים אינו שקול לפסוק $(A \wedge B) \oplus C$?

יש לבחור תשובה אחת:

$$(A \vee \neg C) \rightarrow (A \wedge (B \oplus C))$$

$$(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg C$$

$$(\neg B \vee (A \oplus C)) \wedge ((A \leftrightarrow B) \vee C) \star$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (A \oplus B \oplus C) \star$$

*ישנן 2 תשובות אפשריות.. מי שסימן או סימנה את אחת מ-2 התשובות הנ"ל קיבל את כל הנקודות.

שאלה מספר 7: (6 נק')

"יקום פריים" ו"יקום המראה" הם שני יקומים מקבילים.
ביקום פריים שולטת פדרציית הכוכבים המאוחדת, שוחרת השלום והצדק, שכל אנשיה דוברים רק אמת.
ביקום המראה שולטת אימפריה רודנית ואכזרית, בראשותה של הקיסרית ג'ורג'יו, שכל אנשיה דוברים רק שקר.
לקיסרית ג'ורג'יו נודע כי מספר קצינים מיקום הפריים חדרו אל יקום המראה. היא מזמנת אליה שלוש קצינות בהן היא חושדת, מתוך כוונה להוציא להורג כל אחת שהיא **בוודאות** מיקום הפריים **או שיתכן** והיא מיקום הפריים.
הקצינה במדים הזהובים אומרת: "אם אני מיקום המראה אז גם הקצינה במדים הכחולים היא מיקום המראה".
הקצינה במדים הכחולים אומרת: "אני מיקום המראה אם ורק אם הקצינה במדים האדומים אינה מיקום המראה".
הקצינה במדים האדומים אומרת: "בדיוק אחת מאיתנו היא מיקום המראה".
על פי דבריהן של שלוש הקצינות, קבעו כמה מהן יוצאו להורג על ידי הקיסרית ג'ורג'יו.

יש לבחור תשובה אחת:

0

1

2

3

שאלה מספר 8: (6 נק')

ידוע כי לפחות אחת מבין שתי הטענות הבאות היא אמת:

- אם השור שתה את המים, אז (המים כיבו את האש והאש שרפה את המקל).
- אם (המים כיבו את האש או שהאש שרפה את המקל), אז השור לא שתה את המים.

כמו-כן ידוע שהשור שתה את המים.
את איזה מבין הפסוקים הבאים ניתן **להסיק בוודאות** מנתונים אלו ?

יש לבחור תשובה אחת:

המים כיבו את האש והאש שרפה את המקל.

המים כיבו את האש אם ורק אם האש שרפה את המקל. ★

המים לא כיבו את האש והאש לא שרפה את המקל.

האש שרפה את המקל.

המים כיבו את האש.

שאלה מספר 9: (6 נק')

סמנו את הטענות הלא נכונות מבין הטענות הבאות:

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד 2 נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

$$\{\mathbb{R}, \{\mathbb{Q}\}\} \triangle \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\} = \{\mathbb{Q}, \{\mathbb{R}\}\} \triangle \{\{\mathbb{Q}\}, \{\mathbb{R}\}\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 7n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 40 \leq n^2 \leq 60\}$$

$$\{\mathbb{Q}, \{\mathbb{Q}\}\} \setminus \{\{\mathbb{Q}\}\} \subset \{\mathbb{Q}, \{\mathbb{Q}\}\} \setminus \{\mathbb{Q}\} \star$$

$$\{x^2 + x \mid x \in \mathbb{Z}\} \subset \{x^2 - x \mid x \in \mathbb{Z}\} \star$$

$$\{a \in \mathbb{N} \mid a^2 - 2a - 3 = 0\} \subset \{1 + 2 \cdot (-1)^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$\{\mathbb{R}, \{\mathbb{R}\}\} \setminus \{\{\mathbb{R}\}\} \in \{\mathbb{R}, \{\mathbb{R}\}\} \setminus \{\mathbb{R}\}$$

שאלה מספר 10: (6 נק')

נגדיר פעולה חדשה בין שתי קבוצות A, B אשר תסומן באופן הבא: $A \oplus B$ כאשר:

$$A \oplus B = \{x \in U \mid x \in A \rightarrow x \in B\}$$

איזו טענה מבין הטענות הבאות נכונה לכל שתי קבוצות A, B המוכלות בקבוצה אוניברסלית U ?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד 2 נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq A \oplus B$$

$$\overline{A} \subseteq A \oplus B \star$$

$$A \cup B \subseteq A \oplus B$$

$$B \subseteq A \oplus B \star$$

$$A \subseteq A \oplus B$$

$$\overline{B} \subseteq A \oplus B$$

שאלה מספר 11: (6 נק')

מי מבין הטענות הבאות נכונה לכל שלוש קבוצות A, B, C ?

יש לבחור תשובה אחת:

אם $A \cap B \subseteq B \cap C$ אז $C \setminus B = \emptyset$

$(A \cap C) \setminus (C \setminus B) = A \cap B$

$(A \cap C) \setminus (C \setminus B) \neq A \cap B$

אם $B \cap C \subseteq A \cap B$ אז $C \setminus B = \emptyset$

אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $C \setminus B \subseteq A \cap C$

אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $C \setminus B \subset A \cap C$ ★

שאלה 12 (8 נקודות)

הוכיחו באמצעות זהויות את השקילות הלוגית הבאה:

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (R \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow R) \wedge \neg Q$$

- יש להתחיל את ההוכחה מלהעתיק את הפסוק שבאחד האגפים ולסיים אותה עם הפסוק המופיע באגף השני.
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל שלב מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 & (P \vee Q) \leftrightarrow (R \wedge \neg Q) \stackrel{\text{דעה מורגן}}{\Leftrightarrow} ((P \vee Q) \wedge (R \wedge \neg Q)) \vee (\neg(P \vee Q) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)) \\
 & \stackrel{\text{חוק הפילוג}}{\Leftrightarrow} ((P \vee Q) \wedge (R \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg R \vee Q)) \\
 & \stackrel{\text{חוק הפילוג}}{\Leftrightarrow} ((P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge Q)) \\
 & \stackrel{\text{חוק הזהות}}{\Leftrightarrow} ((P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (R \wedge F)) \vee ((\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge F)) \\
 & \stackrel{\text{חוק הזהות}}{\Leftrightarrow} (P \wedge R \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
 & \stackrel{\text{חוק הקיבוץ}}{\Leftrightarrow} (\neg Q \wedge (P \wedge R)) \vee (\neg Q \wedge (\neg P \wedge \neg R)) \\
 & \stackrel{\text{חוק הפילוג}}{\Leftrightarrow} \neg Q \wedge ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \\
 & \stackrel{\text{חוק החילוף}}{\Leftrightarrow} ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \wedge \neg Q \\
 & \stackrel{\text{דעה מורגן}}{\Leftrightarrow} (P \leftrightarrow R) \wedge \neg Q
 \end{aligned}$$

שאלה מספר 13: (9 נק')

על ספינת החלל "אנטרפרייז" השתלטה כנופיית פושעים בהנהגתו של קאן, הזומם לתקוף כוכב לכת מיושב המכונה ג'נסיס עם פצצה רבת עוצמה שתהרוג את כל תושביו.

קאן ואנשיו הצליחו לתפוס ולכלוא את כל אנשי הצוות של ה"אנטרפרייז", למעט שלושה קצינים שהצליחו להמלט מהם: קפטן קירק, מר ספוק וד"ר מקוי.

על מנת להציל את תושבי ג'נסיס, על שלושת הקצינים להשלים שלוש משימות: להביס את קאן בגרף אגרופים, לתפוס חזרה את הפיקוד על ספינת החלל "אנטרפרייז" ולנטרל בהצלחה את הפצצה.

נסמן:

A - קפטן קירק הביס את קאן בקרב אגרופים.

B - מר ספוק הביס את קאן בקרב אגרופים.

C - ד"ר מקוי הביס את קאן בקרב אגרופים.

P - קפטן קירק תפס בחזרה פיקוד על ספינת החלל "אנטרפרייז".

Q - מר ספוק תפס בחזרה פיקוד על ספינת החלל "אנטרפרייז".

R - ד"ר מקוי תפס בחזרה פיקוד על ספינת החלל "אנטרפרייז".

X - קפטן קירק ניטרל בהצלחה את הפצצה.

Y - מר ספוק ניטרל בהצלחה את הפצצה.

Z - ד"ר מקוי ניטרל בהצלחה את הפצצה.

באמצעות משתנים אלו, הצרינו את הפסוקים הבאים:

(א) לכל היותר שניים מהקצינים לא הביסו את קאן בקרב אגרופים.

(ב) לפחות אחד מהקצינים הצליח בכל שלוש המשימות.

(ג) אם קירק ישלים בדיוק שתיים מהמשימות, אז לפחות אחד משני הקצינים האחרים ישלים את המשימה הנותרת.

את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

$$A \vee B \vee C \quad (\alpha)$$

$$(A \wedge P \wedge X) \vee (B \wedge Q \wedge Y) \vee (C \wedge R \wedge Z) \quad (\beta)$$

$$((A \wedge P \wedge \neg X) \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge ((A \wedge \neg P \wedge X) \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((\neg A \wedge P \wedge X) \rightarrow (B \vee C)) \quad (\alpha)$$