

מבחן אמצע 2022ג' – שחזור

פתרון

שאלה מספר 1: (14 נק')

נתונה הקבוצה $S = (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{9}, \frac{1}{4}) \cup [4, \infty)$ המוכלת בקבוצה האוניברסלית $U = \mathbb{R}$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:

נכון.

לכל קבוצה $A \subseteq (-\infty, -3]$ ולכל קבוצה $B \subseteq [\frac{1}{4}, 4]$ מתקיים:
 $S \cap (A \cup B) = (A \setminus \{-3\}) \cup (B \cap \{4\})$

לא נכון.

$$[-3, 10] \triangle S = [-3, \frac{1}{9}] \cup [\frac{1}{4}, 4]$$

נכון.

$$\overline{S} \cap \mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 3\}$$

לא נכון.

$$\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{S}$$

נכון.

$$0.\overline{2} \in S$$

נכון.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -3 \vee x > \frac{1}{9}) \wedge (x < \frac{1}{4} \vee x \geq 4)\}$$

נכון.

$$\{\frac{1}{s} \mid s \in S\} \subset (-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}] \cup (4, 9)$$

שאלה מספר 2: (12 נק')

בבוקרה קטנה ביער קסום חיים שלגיה ושבעת הגמדים.
בהגיעו אל היער הקסום, פגש הצייד שלושה מהגמדים: רגזני, ביישני וישנוני.
אומר רגזני: "אם אני לא אוהב את שלגיה, אז ביישני לא אוהב את שלגיה".
אומר ביישני: "אם אני אוהב את שלגיה, אז ישנוני אוהב את שלגיה".
אומר ישנוני: "רגזני אוהב את שלגיה אם ורק אם ביישני אוהב את שלגיה".
ידוע לצייד כי לכל היותר אחד מהגמדים דובר אמת.
לכל אחת מהמסקנות הבאות, קבעו האם היא אמיתית, שקרית או שלא ניתן לקבוע.

✔	אמת.	לפחות אחד משלושת הגמדים אוהב את שלגיה ולפחות אחד מהשלושה לא אוהב את שלגיה.
✔	אמת.	רגזני וישנוני שיקרו.
✔	שקר.	אם רגזני לא אוהב את שלגיה, אז הוא דיבר אמת.
✔	לא ניתן לקבוע.	אם ישנוני אוהב את שלגיה, אז הוא דיבר אמת.
✔	לא ניתן לקבוע.	ביישני אוהב את שלגיה וישנוני אוהב את שלגיה.
✔	לא ניתן לקבוע.	רגזני לא אוהב את שלגיה וישנוני לא אוהב את שלגיה.

שאלה מספר 3: (6 נק')

נתונות הקבוצות:

$$A = \{4, \{6\}, 6, \phi\}$$

$$B = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות, סמנו האם היא אמיתית או שקרית:

(א) $\{\{6\}\} \subset P(A)$

(ב) $B \setminus A \subset P(\{4, \{6\}, \phi\})$

(ג) $B = \{X \in P(A) \mid |X| = 1\}$

שאלה מספר 4: (6 נק')

נתונות שלוש קבוצות A, B, C המוכלות בקבוצה האוניברסלית $U = \{8, 13, 45, 49, 52, 74, 86\}$. נתון כי:

$$A \cap B = \{52, 74\}$$

$$A \setminus B = \{13, 8\}$$

$$\{45, 49\} \Delta B = \{49, 52, 74\}$$

$$B \cap C \subseteq A$$

$$C \setminus B = \{86, 8\}$$

$$|B| < |C|$$

מצאו את הקבוצות A, B, C :

(יש לרשום את התשובה באמצעות סוגריים מסולסלות. במידה וקיבלתם קבוצה ריקה, הקלידו $\emptyset$ בתיבת התשובה.)

$$A = \{13, 8, 52, 74\}$$

$$B = \{45, 52, 74\}$$

$$C = \{8, 86, 52, 74\}$$

שאלה מספר 5: (8 נק')

בכל אחד מהסעיפים הבאים מיצאו דוגמה אחת לקבוצה לא ריקה X המקיימת את דרישות הסעיף (כל סעיף בפני עצמו).

- במידה וקיימת קבוצה כזו, רשמו אותה בחלונית התשובה בצורה מפורשת באמצעות סוגריים מסולסלים, כשביניהם איברי הקבוצה מופרדים באמצעות פסיקים. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. (שימו לב שלא טעיתם בהקלדת התשובות, למשל: שלא שכחתם אף סוגר או פסיק ושלא רשמתם את הסוגר בכיוון ההפוך). במידה ותרצו לרשום את אחת מהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, הקלידו פשוט N, Z, Q, R (אות גדולה). **אסור להשתמש** בסוגריים מרובעים $\square$.
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על דרישות הסעיף, רשמו בחלונית התשובה NO או no. **(אל תשאירו את החלונית ריקה)**

(א) $\{8\} \setminus X = X \setminus \{8\}$

$$X = \{8\}$$

(ב) $\{8\} \in X \wedge \{8\} \subset X$

$$X = \{\{8\}, 8\}$$

(ג) $(\{2t \mid t \in X\} \subseteq \mathbb{N}) \wedge (X \cap \mathbb{N} = \emptyset)$

$$X = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

(ד) $(X \subseteq \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{3} \in X)$

$$X = \text{no}$$

שאלה מספר 6: (6 נק')

נתונות הקבוצות:

$$A = \{\phi\} \cup (-2, 2)$$

$$B = \{\phi\} \cup \mathbb{N}$$

מי מבין הקבוצות הבאות שווה ל $A \cap B$?

יש לבחור תשובה אחת:

- ϕ ☐
- $\{\phi\}$ ☐
- $\{1\}$ ☐
- ☒ $\{\phi, 1\}$
- $\{1, 2\}$ ☐
- $\{\phi, 1, 2\}$ ☐

שאלה מספר 7: (6 נק')

נסמן: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

נתונות שתי הקבוצות הבאות:

$$A = \{4^n | n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$B = \{\frac{1}{5^n} | n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$U = \{\frac{2^s}{5^t} | s, t \in \mathbb{N}_0\}$$

המוכלות בקבוצה האוניברסלית:

$$(2^0 = 4^0 = 5^0 = 1 \text{ (הערה)})$$

סמנו את הטענות **הלא נכונות** מבין הטענות הבאות.

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד 2 נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- $\overline{B} = \{\frac{2^{s+1}}{5^t} | s, t \in \mathbb{N}_0\}$ ☐
- ☒ $\{ab | a \in A \wedge b \in B\} = \{(\frac{4}{5})^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- $A \triangle B \subset A \cup B$ ☐
- ☒ $\overline{A} = \{\frac{2^{2s+1}}{5^{t+1}} | s, t \in \mathbb{N}_0\}$
- $B \subset \{5b | b \in B\}$ ☐
- $A \setminus B \subset \{4k | k \in \mathbb{N}\}$ ☐

שאלה מספר 8: (6 נק')

נתון הפסוק הבא:

"(אם אריק גר ברחוב סומסום אז בנץ לא גר ברחוב סומסום) אם ורק אם קיפי גר ברחוב סומסום."
מי מבין הפסוקים הבאים, **אינו שקול** לפסוק הנתון?

יש לבחור תשובה אחת:

☐ לפחות אחד מהשלושה לא גר ברחוב סומסום,

וגם (קיפי גר ברחוב סומסום או שאריק גר ברחוב סומסום),

וגם (קיפי גר ברחוב סומסום או שבנץ גר ברחוב סומסום).

☐ קיפי לא גר ברחוב סומסום אם ורק אם אריק ובנץ גרים ברחוב סומסום.

☒ בדיוק שניים מהשלושה גרים ברחוב סומסום. ✓

☐ (קיפי לא גר ברחוב סומסום ואריק ובנץ גרים ברחוב סומסום)

או (קיפי גר ברחוב סומסום ואריק לא גר ברחוב סומסום)

או (קיפי גר ברחוב סומסום ובנץ לא גר ברחוב סומסום).

☐ (אריק גר ברחוב סומסום אם ורק אם קיפי גר ברחוב סומסום) אם ורק אם (אריק גר ברחוב סומסום ובנץ לא גר ברחוב סומסום).

שאלה מספר 9: (6 נק')

מי מבין הפסוקים הבאים **אינו** סתירה?

יש לבחור תשובה אחת:

☐ $(P \leftrightarrow \neg Q) \oplus (Q \leftrightarrow \neg P)$

☐ $(P \rightarrow \neg Q) \oplus (Q \rightarrow \neg P)$

☒ $P \wedge (Q \rightarrow \neg P)$ ✓

☐ $P \wedge \neg(Q \rightarrow P)$

☐ $(P \oplus Q) \wedge P \wedge Q$

שאלה מספר 10: (6 נק')

"מיקום פריים" ו"מיקום המראה" הם שני יקומים מקבילים.

במיקום פריים שולטת פדרציית הכוכבים המאוחדת, שוחרת השלום והצדק, שכל אנשיה דוברים רק אמת.

במיקום המראה שולטת אימפריה רודנית ואכזרית, בראשותה של הקיסרית ג'ורג'יו, שכל אנשיה דוברים רק שקר.

לקיסרית ג'ורג'יו נודע כי מספר קצינות מיקום הפריים חדרו אל מיקום המראה. היא מזמנת אליה שש קצינות בהן היא חושדת, מתוך כוונה להוציא להורג כל אחת שהיא **בוודאות** מיקום הפריים **או שיתכן** והיא מיקום הפריים.

הקצינה במדים האדומים אומרת: "אם אני מיקום המראה אז אני מיקום פריים".

הקצינה במדים הכתומים אומרת: "אני מיקום המראה אם ורק אם אני מיקום המראה".

הקצינה במדים הצהובים אומרת: "אני מיקום המראה אם ורק אם אני מיקום פריים".

הקצינה במדים הירוקים אומרת: "אני מיקום המראה או מיקום פריים".

הקצינה במדים הכחולים אומרת: "אני מיקום המראה וגם מיקום פריים".

הקצינה במדים הסגולים אומרת: "אני מיקום פריים".

על פי דבריהן של שש הקצינות, קבעו מי מהן **לא יוצאו להורג** על ידי הקיסרית ג'ורג'יו.

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

☐ הקצינה במדים הירוקים.

☐ הקצינה במדים האדומים.

☒ הקצינה במדים הכחולים.  היא בוודאות מיקום המראה.

☐ הקצינה במדים הסגולים.

☒ הקצינה במדים הצהובים.  היא בוודאות מיקום המראה.

☐ הקצינה במדים הכתומים.

שאלה מספר 11: (6 נק')

סמנו את הטענות הנכונות לכל שתי קבוצות A, B .

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד 2 נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

$(\{1, 2\} \subseteq A \cup B) \rightarrow (1 \notin A \leftrightarrow 1 \in B)$ ☐

✓ $(\{1, 2\} \subseteq A \cap B) \rightarrow (1 \in A \leftrightarrow 2 \in B)$ ☒

$(\{1, 2\} \subseteq A \triangle B) \rightarrow (A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow B \setminus A \neq \emptyset)$ ☐

✓ $(\{1, 2\} \subseteq A \cap B) \rightarrow (|A \cup B| - |B| \leq |A| - 2)$ ☒

$(\{1, 2\} \subseteq A \cup B \wedge |A \cap B| = 2) \rightarrow (|A \cup B| \geq 4)$ ☐

$(\{1, 2\} \subseteq A \triangle B) \rightarrow (1 \in A \setminus B \leftrightarrow 2 \in B \setminus A)$ ☐

הוכיחו באמצעות זהויות שהפסוק הבא הוא טאוטולוגיה:

$$((B \rightarrow A) \rightarrow B) \leftrightarrow B$$

- יש להתחיל את ההוכחה מלהעתיק את הפסוק ולסיים אותה כשמגיעים ל- T .
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל שלב מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

	$((B \rightarrow A) \rightarrow B) \leftrightarrow B$
ויתור על אממ	$((((B \rightarrow A) \rightarrow B) \wedge B) \vee (\neg((B \rightarrow A) \rightarrow B) \wedge \neg B))$
ויתור על חץ	$((\neg(B \rightarrow A) \vee B) \wedge B) \vee (\neg((B \rightarrow A) \rightarrow B) \wedge \neg B)$
שלילה של חץ	$((((B \wedge \neg A) \vee B) \wedge B) \vee (((B \rightarrow A) \wedge \neg B) \wedge \neg B))$
חילוף	$((B \vee (B \wedge \neg A)) \wedge B) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B \wedge \neg B))$
פילוג	$((B \vee B) \wedge (B \vee \neg A)) \wedge B \vee (((B \rightarrow A) \wedge (\neg B \wedge \neg B)))$
אידמפוטנטיות	$((B \wedge (B \vee \neg A)) \wedge B) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B))$
חילוף	$((B \wedge B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B))$
אידמפוטנטיות	$((B) \wedge (B \vee \neg A)) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B))$
פילוג	$((B \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B))$
אידמפוטנטיות	$((B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((B \rightarrow A) \wedge (\neg B))$
ויתור על חץ	$((B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((\neg B \vee A) \wedge (\neg B))$
חילוף	$((B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((\neg B) \wedge (\neg B \vee A))$
פילוג	$((B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((\neg B \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge A))$
אידמפוטנטיות	$((B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((\neg B) \vee (\neg B \wedge A))$
קיבוץ	$(B \vee \neg B) \vee ((B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A))$
טאוטולוגיה	$(T) \vee ((B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A))$
שלילה	T

שאלה מספר 13: (9 נק')

שאלה 13 (9 נקודות)

אלכס ובן השתתפו במיונים לתפקיד נחשק. במהלך המיונים נתבקשו המועמדים לפתור בחינה קצרה שבה שתי שאלות. משקל כל שאלה בבחינה 5 נקודות. תשובה נכונה מזכה ב-5 נקודות; תשובה שגויה - 0 נקודות; לא ניתן לקבל ציון חלקי.

נסמן:

A1 — אלכס ענה תשובה נכונה על השאלה הראשונה.

A2 — אלכס ענה תשובה נכונה על השאלה השנייה.

B1 — בן ענה תשובה נכונה על השאלה הראשונה.

B2 — בן ענה תשובה נכונה על השאלה השנייה.

באמצעות משתנים אלו, הצרינו את הפסוקים הבאים:

(א) אלכס ובן ענו נכונה על אותן השאלות בדיוק. (יתכן ושניהם שגו בשתייהן).

(ב) הציון הכולל של אלכס ובן בבחינה הוא 15 נקודות.

(ג) אלכס קיבל בבחינה ציון גבוה יותר מבן.

את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

א. $(A_1 \wedge A_2 \wedge B_1 \wedge B_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge B_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B_1 \wedge B_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2)$

ב. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B_1 \wedge B_2) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge B_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge B_1 \wedge B_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg B_1 \wedge B_2)$

ג. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B_1 \wedge B_2) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge B_1 \wedge \neg B_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B_1 \wedge \neg B_2)$