

מבחן אמצע 2023 א' – שחזור

פתרון

תאריך הבחינה – 16.12.2022

שאלה מספר 1: (16 נק')

נתונות 3 הקבוצות הבאות:

$$A = (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \quad B = (-6, 6) \quad C = \{-5n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:

(הערה: $-0.2\overline{7} = -0.277777777777\ldots$).

$$(\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B) \subset \mathbb{N} \quad \mathbf{F}$$

$$-0.2\overline{7} \in \left\{ \frac{x}{18} \mid x \in C \right\} \quad \mathbf{T}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq A \Delta B \quad \mathbf{T}$$

$$(B \setminus C \subset B) \wedge (A \subset A \cup C) \quad \mathbf{T}$$

$$\left\{ \frac{5}{x} \mid x \in A \right\} = \left\{ \frac{x}{6} \mid x \in B \right\} \quad \mathbf{F}$$

$$\mathbb{Z} \cap A \subset \{|x| \mid x \in C\} \cup C \quad \mathbf{F}$$

$$(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} \subseteq C) \oplus (C \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \quad \mathbf{F}$$

$$\sqrt{2} \in B \Delta \mathbb{Q} \quad \mathbf{T}$$

שאלה מספר 2: (12 נק')

בעיר התת-מימית "ביקיני-בוטום" חיים שני סוגים של תמנונים:

תמנונים בעלי 8 זרועות ותמנונים בעלי 7 זרועות.

ערב אחד נפגשו במסעדת "הסרטן הפריך" שלושה תמנונים:

התמנון האדום, תמנון החוף ותמנון המצולות.

התמנון האדום אמר: מספר הזרועות שלי שווה למספר הזרועות של תמנון החוף.

תמנון החוף אמר: תמנון המצולות הוא בעל 7 זרועות.

תמנון המצולות אמר: מספר הזרועות שלי שווה למספר הזרועות של תמנון החוף.

ידוע כי:

- לכל השלושה יחד יש מספר זוגי של זרועות.
- בדיוק 2 מהתמנונים אמרו אמת.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה, לא נכונה, או שלא ניתן לקבוע האם היא נכונה.

תמנון המצולות אמר אמת.	☒ נכון.
תמנון החוף והתמנון האדום שיקרו.	☒ לא נכון.
לתמנון המצולות יש 8 זרועות.	☒ לא ניתן לקבוע.
לתמנון האדום יש 8 זרועות.	☒ נכון.
תמנון החוף אמר אמת אם ורק אם הוא בעל 8 זרועות.	☒ לא נכון.

שאלה מספר 3: (6 נק')

בכל אחד מהסעיפים הבאים מיצאו דוגמה אחת לקבוצה לא ריקה X המקיימת את דרישות הסעיף (כל סעיף בפני עצמו).

- במידה וקיימת קבוצה כזו, רשמו אותה בחלונית התשובה בצורה מפורשת באמצעות סוגריים מסולסלים, כשביניהם איברי הקבוצה מופרדים באמצעות פסיקים. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. (שימו לב שלא טעיתם בהקלדת התשובות, למשל: שלא שכחתם אף סוגר או פסיק ושלא רשמתם את הסוגר בכיוון ההפוך). במידה ותרצו לרשום את אחת מהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, הקלידו פשוט N, Z, Q, R (אות גדולה). **אסור להשתמש** בסוגריים מרובעים $[]$.
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על דרישות הסעיף, רשמו בחלונית התשובה NO או no. **(אל תשאירו את החלונית ריקה)**

(א) $X \cap \{4, 7\} = X \setminus \{4, 6\}$

$X =$

(ב) $\{n \in \mathbb{N} \mid |n| + 4 \cdot n = 0\} \subset X \subset \{\frac{4 \cdot n}{|n|} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

$X =$

(ג) $(\mathbb{N} \subseteq X \cap \mathbb{N}) \wedge (X \setminus \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N})$

$X =$

שאלה מספר 4: (6 נק')

נתונות שתי קבוצות סופיות A, B ולא זרות כך ש- $|A| = 35, |B| = 31$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את מספר האיברים המינימלי (משמאל) ואת מספר האיברים המקסימלי (מימין) האפשריים בקבוצה הנתונה באותו הסעיף.

- (א) $\boxed{35} \leq |A \cup B| \leq \boxed{65}$
- (ב) $\boxed{1} \leq |A \cap B| \leq \boxed{31}$
- (ג) $\boxed{4} \leq |A \setminus B| \leq \boxed{34}$

שאלה מספר 5: (6 נק')

נתון הפסוק הבא:

"נעמי חיה את החלום אם ורק אם (היא מצחצחת שיניים בבוקר ומעשנת בצהריים)."
מי מבין הפסוקים הבאים, **אינו שקול** לפסוק הנתון?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ (נעמי חיה את החלום והיא מצחצחת שיניים בבוקר והיא מעשנת בצהריים) או (נעמי לא חיה את החלום והיא לא מצחצחת שיניים בבוקר) או (נעמי לא חיה את החלום והיא לא מעשנת בצהריים).
- ☐ (נעמי חיה את החלום או שהיא לא מצחצחת שיניים בבוקר או שהיא לא מעשנת בצהריים), וגם (נעמי לא חיה את החלום או שהיא מצחצחת שיניים בבוקר), וגם (נעמי לא חיה את החלום או שהיא מעשנת בצהריים).
- ☐ נעמי לא חיה את החלום אם ורק אם (אם היא מצחצחת שיניים בבוקר אז היא לא מעשנת בצהריים)
- ☒ (נעמי לא חיה את החלום או שהיא מצחצחת שיניים בבוקר) וגם (נעמי חיה את החלום או שהיא לא מצחצחת שיניים בבוקר או שהיא לא מעשנת בצהריים).
- ☐ (נעמי לא חיה את החלום אם ורק אם היא מצחצחת שיניים בבוקר) אם ורק אם (היא מצחצחת שיניים בבוקר ולא מעשנת בצהריים).

שאלה מספר 6: (6 נק')

נתונים הפסוקים α, β כך ש $\alpha \rightarrow \beta$ טאוטולוגיה ו- α לא סתירה.

מה ניתן להסיק בוודאות מנתונים אלו?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- ☐ β סתירה.
- ☐ β לא טאוטולוגיה.
- ☒ β לא סתירה. ✓
- ☐ β טאוטולוגיה.
- ☐ $\alpha \rightarrow \beta$ טאוטולוגיה.

שאלה מספר 7: (6 נק')

נתונה הקבוצה: $L = \{\{8, \phi\}, \{8\}, \phi\}$

סמנו את הטענה **הלא נכונה** מבין הטענות הבאות:

יש לבחור תשובה אחת:

$\{8, \phi\} \in L \triangle \{8, \{\phi\}\}$ ☐

$\{8, \phi\} \in L \triangle \{\{8\}, \{\phi\}\}$ ☐

$\{8, \phi\} \in L \triangle \{\{8, \phi\}\}$ ☒

$\{8, \phi\} \in L \triangle \{\{8\}, \phi\}$ ☐

$\{8, \phi\} \in L \triangle \{8, \phi\}$ ☐

שאלה מספר 8: (6 נק')

נתונה הטענה הבאה:

לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים:

אם $B = C$ אז $A \cup B \subseteq A \cap C$

מי מבין ההצבות הבאות מהווה **דוגמה נגדית** לטענה זו ?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד 2 נקודות מציון השאלה.

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

$A = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\}, B = \{x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} | x^2 \in \mathbb{N}\}, C = A$ ☐

$A = \{\phi, \{\phi\}\}, B = \{\mathbb{N}, \phi, \{\phi\}\} \cap \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\}, C = \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\} \setminus \mathbb{Z}$ ☒

$A = \{\phi, \{\phi\}\}, B = \{\mathbb{N}, \phi, \{\phi\}\} \cap \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\}, C = \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\} \setminus \{\mathbb{Z}\}$ ☐

$A = \{\phi\}, B = \{\mathbb{N}, \phi, \{\phi\}\} \cap \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\}, C = \{\mathbb{Z}, \phi, \{\phi\}\} \setminus \mathbb{Z}$ ☐

$A = B = \{x \in (0, \infty) | x^2 \in \mathbb{N}\}, C = \{+\sqrt{x} | x \in \mathbb{N}\}$ ☐

$A = \mathbb{N}, B = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\}, C = \{+\sqrt{x} | x \in \mathbb{N}\}$ ☒

שאלה מספר 9: (6 נק')

מי מבין הטענות הבאות נכונה לכל שלוש קבוצות A, B, C ?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$
- ☐ $B \subseteq C \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$
- ☐ $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$
- ☐ $(A \cup B \cup C) \setminus (A \Delta B) = \emptyset \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$
- ☐ $C \subseteq B \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$
- ☒ $(A \Delta C) \cap (B \Delta C) = \emptyset \Leftrightarrow A \Delta C \subseteq A \Delta B$

שאלה מספר 10: (6 נק')

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- ☒ $\{n + m | n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$
- ☐ $\{n - m | n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$
- ☒ $\{n + \frac{1}{m} | n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q} \cap (1, \infty)$
- ☐ $\{\frac{n}{m} | n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$
- ☐ $\{\frac{n}{m} | n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N} \wedge n < m\} \subset \mathbb{Q} \cap (0, 1)$

שאלה מספר 11: (6 נק')

נתון הפסוק: $\alpha = (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

סמנו את הטענה הלא נכונה מבין הטענות הבאות:

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ $(P \oplus Q \oplus R) \rightarrow \alpha \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R) \rightarrow \alpha$
- ☐ הפסוק $(P \wedge \neg(Q \wedge R)) \leftrightarrow \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה.
- ☐ הפסוק $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \rightarrow \neg\alpha$ הוא טאוטולוגיה.
- ☐ הפסוק $(\neg P \vee (P \wedge Q \wedge R)) \leftrightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה.
- ☐ $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow \neg\alpha$
- ☒ $(P \oplus Q \oplus R) \vee (\neg P \wedge (Q \leftrightarrow R)) \Leftrightarrow \alpha$

שאלה מספר 12: (8 נק')

הוכיחו באמצעות זהויות את השקילות הלוגית הבאה:

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow B)$$

- יש להתחיל את ההוכחה מלהעתיק את הפסוק שבאחד האגפים ולסיים אותה עם הפסוק המופיע באגף השני.
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל שלב מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

$$(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow B) \quad \overset{\text{שליטת גרירה}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg C \rightarrow A) \vee (\neg(C \rightarrow C) \vee B) \quad \overset{\text{ויתור על גרירה}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\neg C \wedge \neg A) \vee ((C \wedge \neg C) \vee B) \quad \overset{\text{חוק הזהות}}{\Leftrightarrow} (\neg C \wedge \neg A) \vee (F \vee B) \quad \overset{\text{סתירה}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\neg C \wedge \neg A) \vee B \quad \overset{\text{חוק הפילוג}}{\Leftrightarrow} (\neg A \wedge \neg C) \vee B \quad \overset{\text{חוק החילוף}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \quad \overset{\text{ויתור על גרירה}}{\Leftrightarrow} (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$$

שאלה מספר 13: (9 נק')

ד"ר אמט בראון המציא ובנה מכונת זמן, אותה גנבו ממנו שלושה אחים - ביי, גריף וקליף. כעת, כל אחד מהם עלול לעשות שימוש לרעה במכונת הזמן, ולחזור לעתיד, להווה או לעבר. נסמן:

A - ביי יחזור בחזרה לעתיד.

B - ביי יחזור בחזרה להווה.

C - ביי יחזור בחזרה לעבר.

P - גריף יחזור בחזרה לעתיד.

Q - גריף יחזור בחזרה להווה.

R - גריף יחזור בחזרה לעבר.

X - קליף יחזור בחזרה לעתיד.

Y - קליף יחזור בחזרה להווה.

Z - קליף יחזור בחזרה לעבר.

באמצעות משתנים אלו, הצרינו את הפסוקים הבאים:

(א) אם לפחות אחד משלושת האחים יחזור בחזרה לעתיד, אז כל שלושת האחים יחזרו בחזרה לעתיד.

(ב) לכל היותר שניים משלושת האחים לא יחזרו בחזרה לעתיד.

(ג) אם ביי יחזור בחזרה לעתיד, אז (אחד מאחיו יחזור בחזרה להווה והאח השלישי יחזור בחזרה לעבר).

את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

פתרון:

א. $(A \vee P \vee X) \rightarrow (A \wedge P \wedge X)$

ב. $\neg(\neg A \wedge \neg P \wedge \neg X)$

ג. $A \rightarrow ((Q \wedge Z) \vee (B \wedge Y))$