

פתרון

שאלה מספר 1: (16 נק')

נתונות שתי הקבוצות הבאות:

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{3}, \mathbb{Q}, \phi \right\}$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:

- | | | | |
|---|---|---------|---|
| ✓ | ⚡ | לא נכון | $\{9a \mid a \in A\} \cap \mathbb{N} = \{7a \mid a \in A\} \cap \mathbb{N}$ |
| ✓ | ⚡ | נכון | $(0.4\overline{6} \in A) \wedge (0.4 \in A)$ |
| ✓ | ⚡ | לא נכון | $\{a \cdot (2n+1) \mid a \in A \wedge n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ |
| ✓ | ⚡ | נכון | $(B \setminus \mathbb{Q}) \Delta (B \setminus \{\mathbb{Q}\}) = B \setminus \{\phi\}$ |
| ✓ | ⚡ | נכון | $\left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\} \subset (2, 3] \cap \mathbb{Q}$ |
| ✓ | ⚡ | נכון | $\{B \setminus P(B), B \setminus A\} \subset \{X \subseteq B \mid X = 2\}$ |
| ✓ | ⚡ | לא נכון | $B \cap P(B) \subseteq A$ |
| ✓ | ⚡ | נכון | $\{x \mid 6x - 1 \in \mathbb{N} \wedge 3 - 6x \in \mathbb{N}\} = A \cap B$ |

שאלה מספר 2: (10 נק')

על מנת לסיים בהצלחה את לימודיו במכינה להנדסה, על קלווין לעבור שלוש בחינות: בחינה בפיזיקה, בחינה במתמטיקה ובחינה בעברית.

שלושה ממוריו של קלווין, דנו ביניהם בסיכויי ההצלחה שלו בבחינות.

משה אמר: קלווין יצליח בבחינה בפיזיקה אם ורק אם הוא יצליח בבחינה במתמטיקה.

אמיר אמר: אם קלווין יצליח בבחינה במתמטיקה, אז הוא יצליח בשתי הבחינות האחרות.

מרים אמרה: קלווין יצליח בבחינה בעברית.

ידוע שלפחות שניים מהמורים של קלווין צדקו.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה, לא נכונה או שלא ניתן לקבוע בוודאות את נכונותה.

- | | |
|---|---|
| אם כל השלושה צדקו, אז קלווין הצליח בבחינה בעברית. | ☒ <input type="text" value="נכון."/> |
| קלווין נכשל לפחות בבחינה אחת. | ☒ <input type="text" value="לא ניתן לקבוע."/> |
| מרים צדקה אם ורק אם קלווין נכשל בכל שלוש הבחינות. | ☒ <input type="text" value="לא נכון."/> |
| אמיר צדק. | ☒ <input type="text" value="נכון."/> |
| קלווין הצליח לפחות בבחינה אחת. | ☒ <input type="text" value="לא ניתן לקבוע."/> |

בכל אחד מהסעיפים הבאים מיצאו דוגמה אחת לקבוצה לא ריקה X המקיימת את דרישות הסעיף (כל סעיף בפני עצמו).

- במידה וקיימת קבוצה כזו, רשמו אותה בחלונית התשובה בצורה מפורשת באמצעות סוגריים מסולסלים, כשביניהם איברי הקבוצה מופרדים באמצעות פסיקים. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. (שימו לב שלא טעיתם בהקלדת התשובות, למשל: שלא שכחתם אף סוגר או פסיק ושלא רשמתם את הסוגר בכיוון ההפוך). במידה ותרצו לרשום את אחת מהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, הקלידו פשוט N, Z, Q, R (אות גדולה).
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על דרישות הסעיף, רשמו בחלונית התשובה NO או no. (אל תשאירו את החלונית ריקה)

נתונה הקבוצה $A = \{2, \{2\}\}$.

(א) $(X \in A) \wedge (X \in P(A))$

$X =$

(ב) $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq P(A))$

$X =$

(ג) $(2 \in X \cap A) \rightarrow (2 \notin A)$

$X =$

(ד) $(2 \in X \cup A) \rightarrow (2 \notin A)$

$X =$

שאלה מספר 4: (6 נק')

לתוכנית "נתיב לאקדמיה" נרשמו 116 תלמידים. במסגרת התוכנית, לומדים התלמידים שלושה קורסים: מתמטיקה, עברית ואנגלית. מסקר שנערך בין התלמידים עולה כי:

- 51 אוהבים מתמטיקה.
- 63 אוהבים עברית.
- 91 אוהבים מתמטיקה או עברית.
- 35 אוהבים בדיוק שניים משלושת המקצועות.
- 5 לא אוהבים אף לא אחד משלושת המקצועות.
- מספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ועברית שווה למספר התלמידים שאוהבים מתמטיקה ואנגלית.
- מספר התלמידים שאוהבים רק אנגלית ועברית (בלי מתמטיקה) שווה למספר התלמידים שאוהבים את כל שלושת המקצועות.

אתם רשאים להשאיר את התשובות כביטויים אריתמטיים.

- אם למשל החישוב המתאים לפתרון הוא $31+54-25$, ניתן לכתוב בתיבת התשובה 60 או $31+54-25$.
- אם למשל החישוב המתאים לפתרון הוא $\frac{2100}{14}$, ניתן לרשום בתיבת התשובה $2100/14$ או 150.

(א) (2 נק') כמה מהתלמידים אוהבים רק אנגלית ?

תשובתך:

(ב) (2 נק') כמה מהתלמידים אוהבים מתמטיקה ועברית ?

תשובתך:

(ג) (2 נק') כמה מהתלמידים אוהבים את כל שלושת המקצועות ?

תשובתך:

שאלה מספר 5: (6 נק')

נתון הפסוק הבא:

"(אם אריק גר ברחוב סומסום אז בנץ לא גר ברחוב סומסום) אם ורק אם קיפי גר ברחוב סומסום."
מי מבין הפסוקים הבאים, **אינו שקול** לפסוק הנתון ?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☒ בדיוק שניים מהשלושה גרים ברחוב סומסום. ✓
- ☐ (קיפי לא גר ברחוב סומסום ואריק ובנץ גרים ברחוב סומסום)
- ☐ או (קיפי גר ברחוב סומסום ואריק לא גר ברחוב סומסום)
- ☐ או (קיפי גר ברחוב סומסום ובנץ לא גר ברחוב סומסום).
- ☐ לפחות אחד מהשלושה לא גר ברחוב סומסום,
- ☐ וגם (קיפי גר ברחוב סומסום או שאריק גר ברחוב סומסום),
- ☐ וגם (קיפי גר ברחוב סומסום או שבנץ גר ברחוב סומסום).
- ☐ (אריק גר ברחוב סומסום אם ורק אם קיפי גר ברחוב סומסום) אם ורק אם (אריק גר ברחוב סומסום ובנץ לא גר ברחוב סומסום).
- ☐ קיפי לא גר ברחוב סומסום אם ורק אם אריק ובנץ גרים ברחוב סומסום.

שאלה מספר 6: (6 נק')

נתונה הקבוצה הבאה: $A = (-5, 8] \cup \{9\} \cup [10, 23)$

סמנו את הטענות **הלא נכונות** מבין הטענות הבאות:

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- ☒ $A \setminus \mathbb{N} = (-5, 8) \cup (10, 23)$ ✓
- ☐ $A \Delta (-10, 20) \subset (-10, 5] \cup (8, 10) \cup [20, 23)$
- ☐ $A \cap \{8 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = A \cap \{10 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$
- ☒ $A = \{x \in \mathbb{R} | 9 + x \in A \leftrightarrow 9 - x \in A\}$ ✓
- ☐ $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \setminus A = \{-x | x \in \mathbb{N} \wedge 2x > 9\}$
- ☐ $A \cup \{8 + \frac{n}{2} | n \in \mathbb{N} \wedge n < 30\} = A \cup \{10 - \frac{n}{2} | n \in \mathbb{N} \wedge n < 30\}$

שאלה מספר 7: (6 נק')

בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם הקבוצה הנתונה היא קבוצת החזקה $P(A)$ של איזושהי קבוצה A .

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

☒ $\{\phi, \{\{\phi\}\}\}$ ✓ נכון. $A = \{\{\phi\}\}$

☐ $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\{\phi\}\}\}, \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}\}$

☐ $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}\}$

☐ $\{\{\phi\}\}$

☒ $\{\phi, \{\phi\}\}$ ✓ נכון. $A = \{\phi\}$

שאלה מספר 8: (6 נק')

סמנו את הטענה **הלא נכונה**, מבין הטענות הבאות:

יש לבחור תשובה אחת:

☐ $\{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{3n - 1 | n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \setminus \{3n | n \in \mathbb{Z}\}$

☐ $\{4n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{4n - 1 | n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \setminus \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$

☒ $\{5n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \Delta \{2n | n \in \mathbb{Z}\} = \{10n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \Delta \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$ ✓

☐ $\{5n - 1 | n \in \mathbb{N}\} \cap \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\} = \{10n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$

☐ $\{5n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{2n | n \in \mathbb{Z}\} = \{10n + 1 | n \in \mathbb{Z}\} \setminus \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$

☐ $\{10n - 101 | n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} = \{10n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$

שאלה מספר 9: (6 נק')

מי מבין הטענות הבאות נכונה לכל שלוש קבוצות A, B, C ?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ אם $A = B = C$ אז $A \Delta B \Delta C = A \cap B \cap C$
- ☐ אם $(A = B \vee A = C \vee B = C)$ אז $A \Delta B \Delta C = A \cap B \cap C$
- ☐ אם $(A \cap B = A \cap C \vee A \Delta B = A \Delta C)$ אז $A \cup B = A \cup C$
- ☒ אם $B = C$ אז $A \Delta B \Delta C = A$
- ☐ $(A \Delta C) \cup (B \Delta C) \subseteq A \Delta B$
- ☐ אם $(A \cap B \not\subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C)$ אז $A \Delta B \subseteq C$

שאלה מספר 10: (6 נק')

בכניסה למתחם מאובטח תלוי שלט ובו כתוב:

"הכניסה למתחם תתאפשר באמצעות כרטיס מגנטי או (בהצגת אישור כניסה ותעודה מזהה)".

לשילב לא אישור להיכנס למתחם. מה בהכרח נכון?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- ☐ לשילב אין אישור כניסה חתום.
- ☐ לשילב אין כרטיס מגנטי או שאין לה תעודה מזהה.
- ☐ לשילב אין תעודה מזהה.
- ☒ לשילב אין אישור כניסה חתום או שאין לה תעודה מזהה.
- ☒ לשילב אין כרטיס מגנטי.

שאלה מספר 11: (6 נק')

נתון הפסוק:

$$\alpha := [(P \leftrightarrow Q) \oplus (Q \leftrightarrow R) \oplus (R \leftrightarrow P)]$$

סמנו את הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

יש לבחור תשובה אחת:

☐ $\alpha \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

☐ $\alpha \Rightarrow P \vee Q \vee R$

☐ $\alpha \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \oplus R)$

☐ הפסוק α הוא סתירה.

☒ הפסוק α הוא טאוטולוגיה. ✓

שאלה מספר 12: (9 נק')

נתון שהפסוק $P \rightarrow Q$ הוא טאוטולוגיה.

הוכיחו **באמצעות זהויות** את השקילות הלוגית הבאה:

$$[(P \vee \neg R) \rightarrow Q] \leftrightarrow [P \rightarrow (Q \wedge \neg S)] \Leftrightarrow (R \vee Q) \oplus (S \wedge P)$$

- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד או בנתון.
- כדאי, אך לא חובה, להתחיל את ההוכחה מהזהות של ויתור על גרירה.
- בכל שלב מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

$$(P \vee \neg R) \rightarrow Q \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge \neg S)) \quad \text{ויתור על גרירה} \quad \Leftrightarrow \quad (\neg(P \vee \neg R) \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg S)) \quad \text{דה מורגן}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg \neg R) \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg S)) \quad \text{חוק הפילוג} \quad \Leftrightarrow ((\neg P \wedge R) \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg S)) \quad \text{חוק הפילוג}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (R \vee Q)) \leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg S)) \quad \text{חוק הפילוג} \quad \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (R \vee Q)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \vee \neg S)) \quad \text{ויתור על גרירה} \quad \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (R \vee Q)) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \vee \neg S)) \quad \text{חוק הפילוג}$$

$$\Leftrightarrow (T \wedge (R \vee Q)) \leftrightarrow (T \wedge (\neg P \vee \neg S)) \quad \text{חוק הזהות} \quad \Leftrightarrow (R \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg S) \quad \text{דה מורגן} \quad \Leftrightarrow (R \vee Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge S) \quad \text{חוק החילוף}$$

$$\Leftrightarrow (R \vee Q) \leftrightarrow \neg(S \wedge P) \quad \text{חוק החילוף} \quad \Leftrightarrow (R \vee Q) \oplus (S \wedge P) \quad \text{שלילה של אם"ם}$$

שאלה מספר 13: (9 נק')

בית היתומים הקתולי בשיקגו, בו גדלו שני האחים ג'ייק ואלווד בלז, נמצא בסכנת סגירה בשל חוב של 5,000 דולר לרשויות המס של מדינת אילינוי. השניים איחדו את להקתם "האחים בלז", הופיעו באולם הנשפים של מלון פלאזה וגייסו 5,000 דולר. כעת, עליהם להעביר את הכסף לרשויות המס, אולם בדרכם עומדים משטרת אילינוי, המפלגה הנאצית האמריקנית וארוסתו לשעבר של ג'ייק.

נסמן:

A – ג'ייק חמק ממשטרת אילינוי	P – אלווד חמק ממשטרת אילינוי	X – המיסים שולמו בזמן
B – ג'ייק חמק מהמפלגה הנאצית האמריקאית	Q – אלווד חמק מהמפלגה הנאצית האמריקאית	Y – בית היתומים ניצל מסגירה
C – ג'ייק חמק מארוסתו לשעבר	R – אלווד חמק מארוסתו לשעבר של ג'ייק	

באמצעות משתנים אלו, הצרינו את הפסוקים הבאים:

- (א) אם שני האחים חמקו ממשטרת אילינוי, מהמפלגה הנאצית האמריקנית ומארוסתו לשעבר של ג'ייק אז המיסים שולמו בזמן ובית היתומים ניצל מסגירה.
(ב) אם **לפחות אחד** משני האחים חמק ממשטרת אילינוי, מהמפלגה הנאצית האמריקנית ומארוסתו לשעבר של ג'ייק אז המיסים שולמו בזמן ובית היתומים ניצל מסגירה.
(ג) אם **אחד** משני האחים חמק ממשטרת אילינוי אז האח **השני** חמק מהמפלגה הנאצית האמריקנית וגם ג'ייק **לא** חמק מארוסתו לשעבר.

(א) אם שני האחים חמקו ממשטרת אילינוי, מהמפלגה הנאצית האמריקנית ומארוסתו לשעבר של ג'ייק אז המיסים שולמו בזמן ובית היתומים ניצל מסגירה.

$$(A \wedge B \wedge C \wedge P \wedge Q \wedge R) \rightarrow (X \wedge Y)$$

(ב) אם **לפחות אחד** משני האחים חמק ממשטרת אילינוי, מהמפלגה הנאצית האמריקנית ומארוסתו לשעבר של ג'ייק אז המיסים שולמו בזמן ובית היתומים ניצל מסגירה.

$$((A \wedge B \wedge C) \vee (P \wedge Q \wedge R)) \rightarrow (X \wedge Y)$$

(ג) אם **אחד** משני האחים חמק ממשטרת אילינוי אז האח **השני** חמק מהמפלגה הנאצית האמריקנית וגם ג'ייק **לא** חמק מארוסתו לשעבר.

$$((A \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow B)) \wedge \neg C$$