

מבחן אמצע 2022א' – שחזור – המבחן נוצר ע"י אוניברסיטת בן גוריון

פתרון

שאלה מספר 1: (16 נק')

נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = [0, 5] \cap \mathbb{Z}$$

$$B = \left\{ \frac{1-x}{1+x} \mid x \in A \right\}$$

$$C = \left\{ 1, \{1\}, A, \frac{9}{5}, \frac{20}{11} \right\}$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:

- | | | |
|---|---------|---|
| ✓ | נכון | $B \setminus \left\{ \frac{n}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subset B \cap \left\{ \frac{n}{10} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ |
| ✓ | לא נכון | $(C \setminus \{\{2\}\} \subset C) \oplus (C \setminus \{2\} \subset C)$ |
| ✓ | לא נכון | $(C \setminus \{\{1\}\} \subset C) \oplus (C \setminus \{1\} \subset C)$ |
| ✓ | לא נכון | $C \setminus \{A, \mathbb{Q}\} = \{\{1\}\}$ |
| ✓ | נכון | $(B \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) \in C) \wedge (B \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) \subseteq C)$ |
| ✓ | נכון | $A \cap \mathbb{N} \subset A$ |
| ✓ | נכון | $\mathbb{N} \Delta (A \cap B) \subset \mathbb{Z} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ |
| ✓ | לא נכון | $1.8 \in C \rightarrow 1.\bar{8} \in C$ |

שאלה מספר 2: (10 נק')

אריק, בוריס וגלית השתתפו בתחרות איש הברזל.

4 צופים דנו ביניהם, בסיכוייהם של השלושה להגיע לקו הסיום.

צופה א' אמר: אריק לא יגיע לקו הסיום או שבוריס לא יגיע לקו הסיום.

צופה ב' אמר: לפחות אחד מהשלושה יגיע לקו הסיום, אבל לא כל השלושה.

צופה ג' אמר: לפחות שניים מהשלושה יגיעו לקו הסיום.

צופה ד' אמר: אריק יגיע לקו הסיום או שבוריס יגיע לקו הסיום, אבל לא שניהם.

בסוף התחרות הסתבר שלפחות שלושה מבין הצופים צדקו.

על פי נתונים אלו, קבעו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, האם הוא נכון, לא נכון או שלא ניתן לקבוע.

- | | | |
|---|----------------|---|
| ✓ | לא ניתן לקבוע. | אם בדיוק אחד מבין שלושת המתחרים הגיע לקו הסיום, אז גלית הגיעה לקו הסיום. |
| ✓ | לא נכון | בדיוק שלושה מהצופים צדקו אם ורק אם גלית הגיעה לקו הסיום. |
| ✓ | נכון | אם בדיוק שני מתחרים מבין השלושה הגיעו לקו הסיום, אז גלית הגיעה לקו הסיום. |
| ✓ | לא ניתן לקבוע. | צופה ג' צדק. |
| ✓ | נכון | לפחות אחד מהשלושה לא הגיע לקו הסיום. |

שאלה מספר 3: (8 נק')

בכל אחד מהסעיפים הבאים מיצאו דוגמה אחת לקבוצה לא ריקה X המקיימת את דרישות הסעיף (כל סעיף בפני עצמו).

- במידה וקיימת קבוצה כזו, רשמו אותה בחלונת התשובה בצורה מפורשת באמצעות סוגריים מסולסלים, כשביניהם איברי הקבוצה מופרדים באמצעות פסיקים. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. (שימו לב שלא טעיתם בהקלדת התשובות, למשל: שלא שכחתם אף סוגר או פסיק ושלא רשמתם את הסוגר בכיוון ההפוך). במידה ותרצו לרשום את אחת מהקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, הקלידו פשוט N, Z, Q, R (אות גדולה). **אסור להשתמש** בסוגריים מרובעים $[]$.
- במידה ולא קיימת קבוצה העונה על דרישות הסעיף, רשמו בחלונת התשובה NO או no. **(אל תשאירו את החלונת ריקה)**

(א) $(\{1\} \subset X) \wedge (X \in \{\{0, 1\}, \{1\}\})$

$X =$

(ב) $(X \setminus \{1, \{0\}\} = \{0\}) \wedge (\{1, \{0\}\} \setminus X = \{1\})$

$X =$

(ג) $(\{t^2 \mid t \in X\} \subset X) \wedge (X \subset \mathbb{Z})$

$X =$

(ד) $(\mathbb{Z} \subseteq X) \wedge (\mathbb{N} \not\subseteq X)$

$X =$

שאלה מספר 4: (6 נק')

נתונות שלוש קבוצות A, B, C המקיימות:

$A \cup B = \{1, 5, 11, 13, 14, 16\}$
 $A \cap C = \{1, 5\}$
 $C \setminus A = \{10, 23\}$
 $A \setminus (B \Delta C) = \{1, 11, 16\}$

מצאו את הקבוצות הבאות:

(יש לרשום את התשובה באמצעות סוגריים מסולסלות. במידה וקיבלתם קבוצה ריקה, הקלידו $\{\}$ בתיבת התשובה.)

$A \cap B \cap C =$	{1}
$B =$	{1,13,14}
$C =$	{1,5,10,23}

שאלה מספר 5: (6 נק')

נתונה הטענה הבאה: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים:

אם $A \Delta B = \{\phi\}$ אז $A \setminus \{\phi\} = B \setminus \{\phi\}$.

מי מבין הסעיפים הבאים. מהווה דוגמה נגדית לטענה זו ?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- $A = \{\phi, \{\phi\}\}$, $B = A \setminus \{\{\phi\}\}$ ☐
- $A = \{n \in \mathbb{Z} | n^2 = 9n\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} | 70 < n^2 < 100\}$ ☐
- $A = \{\mathbb{Z}\} \cup \{\phi\}$, $B = \{\mathbb{Z}\} \cup \phi$ ☐
- $A = \{\phi, \{\phi\}\}$, $B = A \setminus \{\phi\}$ ☐
- ☒ $A = \{\phi, \{\phi\}\}$, $B = A \setminus \phi$ ☒
- ☒ $A = \{n \in \mathbb{N} | n^2 = 9n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 70 < n^2 < 100\}$ ☒

שאלה מספר 6: (6 נק')

נתונים שני הפסוקים הבאים:

$$\alpha := A \leftrightarrow (B \wedge C)$$

$$\beta := A \oplus B \oplus C$$

קבעו, מי מהגרירות הבאות נכונה:

יש לבחור תשובה אחת:

$\alpha \wedge \beta \Rightarrow C \rightarrow B$ ☐

✔ $\alpha \wedge \beta \Rightarrow B \vee C$ ☒

$\alpha \wedge \beta \Rightarrow B \wedge C$ ☐

$\alpha \wedge \beta \Rightarrow B \rightarrow C$ ☐

$\alpha \wedge \beta \Rightarrow B \leftrightarrow C$ ☐

$\alpha \wedge \beta \Rightarrow B \oplus C$ ☐

שאלה מספר 7: (6 נק')

נתון הפסוק הבא:

"בדיוק אחד מהבאים הוא אמת:

או שגילי, קלואי ושון הולכים לקניות,

או שאם הגר הולכת לבית הספר אז אביתר לא ישן כמו תינוק"

מי מבין הפסוקים הבאים, **אינו שקול** לפסוק הנתון ?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ (גילי, קלואי ושון הולכים לקניות או שהגר לא הולכת לבית הספר או שאביתר לא ישן כמו תינוק)
- ☐ וגם (גילי, קלואי ושון לא הולכים לקניות או שהגר הולכת לבית הספר)
- ☐ וגם (גילי, קלואי ושון לא הולכים לקניות או שאביתר ישן כמו תינוק).
- ☐ גילי, קלואי ושון לא הולכים לקניות אם ורק אם (אם אביתר ישן כמו תינוק אז הגר לא הולכת לבית הספר).
- ☐ (גילי, קלואי ושון הולכים לקניות אם ורק אם הגר הולכת לבית הספר) אם ורק אם (אביתר ישן כמו תינוק או שהגר לא הולכת לבית הספר).
- ☐ גילי, קלואי ושון הולכים לקניות אם ורק אם (אביתר ישן כמו תינוק והגר הולכת לבית הספר).
- ☒ אם גילי, קלואי ושון הולכים לקניות או שהגר הולכת לבית הספר,
- ☒ אז (גילי, קלואי ושון הולכים לקניות והגר הולכת לבית הספר ואביתר ישן כמו תינוק). ✓

שאלה מספר 8: (6 נק')

כל אחד מהילדים בשכונת נווה חמציצים הוא דובר רק של אמת או רק של שקר. בהגיעכם לשכונה אתם פוגשים בחמישה ילדים: מאיר, צחי, חזי, איציק וחנן.

מאיר אומר: "יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו אם ורק אם יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו".

צחי אומר: "יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו או שאין לי לפעמים הרגשה של דה דה וו".

חזי אומר: "יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו או שיש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו".

איציק אומר: "יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו אם ורק אם אין לי לפעמים הרגשה של דה דה וו".

חנן אומר: "יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו וגם יש לי לפעמים הרגשה של דה דה וו".

מבין חמשת הילדים, **מי בוודאות** דובר אמת?

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

- ☒ מאיר. ✓
- ☒ צחי. ✓
- ☐ חזי.
- ☐ איציק.
- ☐ חנן.

שאלה מספר 9: (6 נק')

נתונות שתי קבוצות סופיות A, B המקיימות $|A| > |B|$

ונתונות 3 הטענות הבאות:

1. $0 \leq |A \cap B| \leq |B|$

2. $|A| \leq |A \cup B| \leq |A| + |B|$

3. $|A| - |B| \leq |A \setminus B| \leq |A|$

מי מבין הטענות 1-3 היא טענה אמתית?

יש לבחור תשובה אחת:

- ☐ אף אחת מהטענות.
- ☐ רק טענה 1 נכונה.
- ☐ רק טענה 2 נכונה.
- ☐ רק טענה 3 נכונה.
- ☐ רק טענות 1,2 נכונות.
- ☐ רק טענות 1,3 נכונות.
- ☐ רק טענות 2,3 נכונות.
- ☒ כל שלוש הטענות נכונות. ✓

שאלה מספר 10: (6 נק')

נתונה הקבוצה: $A = [-8, -5) \cup (5, 8]$

סמנו את הטענות **הלא נכונות** מבין הטענות הבאות:

שימו לב: כל תשובה לא נכונה שתסמנו, תוריד שתי נקודות מציון השאלה!

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

☐ לכל קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים: $A \cap (\mathbb{R} \setminus B) = ([-8, -5) \setminus B) \cup ((5, 8] \setminus B)$

☒ $A \cap \{5n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A \cap \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ✓

☒ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \leftrightarrow -x \in A\} \subset \mathbb{R}$ ✓

☐ $A = [-8, 5] \Delta [-5, 8]$

☐ $A \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{-x \mid x \in A \cap \mathbb{N}\}$

שאלה מספר 11: (6 נק')

נגדיר שני קשרים חדשים: $\downarrow, \uparrow$.

טבלת האמת של קשרים אלו נתונה בטבלה הבאה:

X	Y	$X \downarrow Y$	$X \uparrow Y$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	T

מי מבין הפסוקים שבסעיפים a-e **אינו סתירה** ?

- (a) $R \downarrow \neg R$
- (b) $(R \vee S) \uparrow (\neg R \vee S)$ ✓
- (c) $(R \oplus S) \downarrow (R \leftrightarrow S)$
- (d) $(R \uparrow \neg S) \oplus (R \rightarrow S)$
- (e) $(\neg R \downarrow S) \leftrightarrow (R \rightarrow S)$
- (f) כל הפסוקים שבסעיפים הקודמים הם סתירות.

שאלה מספר 12: (8 נק')

הוכיחו **באמצעות זהויות** את השקילות הלוגית הבאה:

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

- יש להתחיל את ההוכחה מלהעתיק את הפסוק שבאחד האגפים ולסיים אותה עם הפסוק המופיע באגף השני.
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל שלב מותר להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד.
- את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.**

שאלה מספר 13: (9 נק')

אל שלב רבע הגמר של "משחק התמנון" העפילו שלושה שחקנים - שחקן מספר 147, שחקן מספר 258 ושחקן מספר 369. על מנת להעפיל לשלב חצי הגמר, כל השלושה נדרשים להשתתף בשלושה משחקים - סטנגה, עמודו ותפ-סו-ני.

נסמן:

A - שחקן מספר 147 נפסל בסטנגה.

B - שחקן מספר 147 נפסל בעמודו.

C - שחקן מספר 147 נפסל בתפ-סו-ני.

P - שחקן מספר 258 נפסל בסטנגה.

Q - שחקן מספר 258 נפסל בעמודו.

R - שחקן מספר 258 נפסל בתפ-סו-ני.

X - שחקן מספר 369 נפסל בסטנגה.

Y - שחקן מספר 369 נפסל בעמודו.

Z - שחקן מספר 369 נפסל בתפ-סו-ני.

באמצעות משתנים אלו, הצרינו את הפסוקים הבאים:

(א) יש לפחות משחק אחד שבו כל שלושת השחקנים נפסלו.

(ב) שחקן מספר 147 הוא השחקן היחיד מבין השלושה שנפסל בכל שלושת המשחקים.

(ג) אם שחקן מספר 258 לא נפסל באף משחק, אז שחקן 369 נפסל בשני משחקים לפחות.

את הפתרון יש לכתוב על דף ולסרוק לאחר סיום הבחינה.

$$(א) (A \wedge P \wedge X) \vee (B \wedge Q \wedge Y) \vee (C \wedge R \wedge Z)$$

$$(ב) (A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(P \wedge Q \wedge R) \wedge \neg(X \wedge Y \wedge Z)$$

$$(ג) \neg(P \vee Q \vee R) \rightarrow [(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)] \Leftrightarrow$$

$$\neg(P \vee Q \vee R) \rightarrow [(X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)]$$